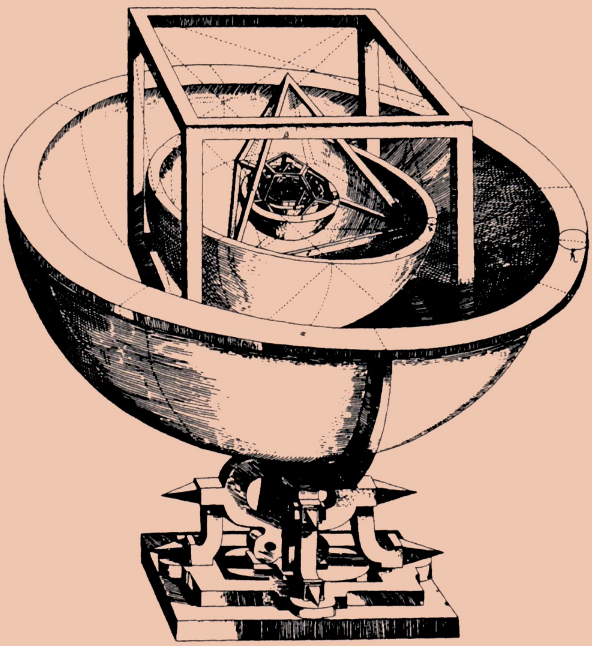
Milda Vosylienė

GEOMETRIJA 10



Milda Vosylienė

GEOMETRIJA 10

TEV

VILNIUS 1999

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos leista naudoti 1999 06 18, grifo Nr. 269

Darbo vadovas: *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Inga Paukštienė, Edita Tatarinavičiūtė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas:
Nijolė Drazdauskienė, Aldona Žalienė

Korektorė: *Birutė Laurinskienė*

Kalbos redaktorė: *Danutė Giliasevičienė*

Gamybos vadovas: *Algimantas Paškevičius*

Konsultantas: *Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV *Internet'o* svetainė: www.tev.lt

ISBN 9986-546-66-4

TURINYS

PRATARMĖ

Kiekviename žingsnyje mus supa įvairūs daiktai, kurių forma, vaizdavimo būdai nuo seno domino žmoniją. Jau žemesnėse klasėse susipažinote su paprasčiausiomis erdvinėmis figūromis — kubu, stačiakampiu gretasieniu, ritiniu, piramide, kūgiu, rutuliu. Šioje knygoje glaustai išnagrinėta ir apibrėžta taškų, tiesių, plokštumų tarpusavio padėtis, kalbama apie geometrinių kūnų vaizdavimą plokštumoje, apibrėžiami paprasčiausi geometriniai kūnai, pateikiamos jų tūrio skaičiavimo formulės, aiškinama, kaip apskaičiuoti paviršiaus plotą.

Atidžiai ir kantriai skaitykite knygą. Ypač svarbu kiekvieną aprašomą situaciją pamatyti erdvėje. Pasinaudokite turimais daiktais, modeliais, konstruokite juos iš popieriaus, strypelių ar kitos medžiagos, tada bus suprantamesni knygoje pateikiami brėžiniai, teoremos ir užduotys.

Spręsdami tūrio, paviršiaus ploto radimo ar kitas skaičiavimų reikalaujančias užduotis, pasinaudokite skaičiuokliais.

Rasti apibrėžimus, teoremų formuluotes, reikiamas formules Jums padės knygos gale esanti dalykinė rodyklė.

Šis stereometrijos kursas praplės Jūsų žinias apie mus supančią erdvę, labai pravers praktikoje.

Linkiu sėkmės.

AUTORĖ

1 PAGRINDINĖS STEREOMETRIJOS SĄVOKOS IR AKSIOMOS

Stereometrija — geometrijos dalis, nagrinėjanti erdvines figūras ir jų savybes. Žodis *stereometrija* kilęs iš graikiškų žodžių „stereos“ — erdvinis ir „metreo“ — matuoju.

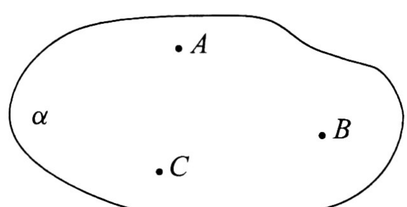
Paprasčiausios erdvės figūros yra taškas, tiesė (kaip ir planimetrijoje) ir plokštuma. Sudėtingesnės figūros — geometriniai kūnai, sudaryti iš erdvės taškų, tenkinančių tam tikras, apibrėžimu nusakomas savybes.

Taškai, kaip ir planimetrijoje, žymimi didžiosiomis lotynų abėcėlės raidėmis $A, B, C, \ldots$, tiesės — mažosiomis raidėmis $a, b, c, \ldots$ (arba dviem didžiosiomis raidėmis $AB, CD, \ldots$), o plokštumos — graikiškomis raidėmis $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (plokštumą vaizduojame taip, kaip parodyta 1 ar 2 pav.).

Jau eidami planimetrijos kursą sužinojote, kas yra aksioma, apibrėžimas, teorema, įrodymas. Mokykliniame kurse nepateikiama visa stereometrijos aksiomų sistema. Suformuluosime kelias aksiomas, kuriomis naudosimės įrodydami teiginius ar braižydami brėžinius. Aksiomų esmę turėtumėte suvokti iš modelių ir gyvenimiškos patirties, pavyzdžiui, „Yra taškų, priklausančių plokštumai, ir taškų, jai nepriklausančių“ arba „Kiekviena plokštuma dalija erdvę į dvi dalis“ ir pan.

Taškų, tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtį išreiškia šios aksiomos:

A1. *Per bet kuriuos tris taškus, esančius ne vienoje tiesėje, eina vienintelė plokštuma.*

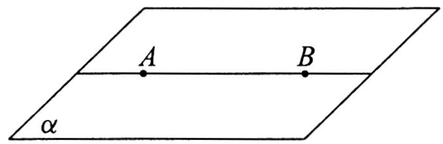


1 pav.

Šią aksiomą galite iliustruoti modeliu: kartono gabalas, paremtas trimis strypeliais, nesvyruoja, t. y. jo padėtis nustatoma vienareikšmiškai (todėl, pavyzdžiui, geodezijos prietaisai tvirtinami ant trikojų).

Kadangi trys nesantys vienoje tiesėje taškai vienareikšmiškai nustato plokštumą, tai plokštumas galima žymėti ir trimis didžiosiomis raidėmis, pavyzdžiui, ABC (1 pav.).

A2. *Jei du tiesės taškai yra plokštumoje, tai visi tos tiesės taškai yra toje plokštumoje.*



2 pav.

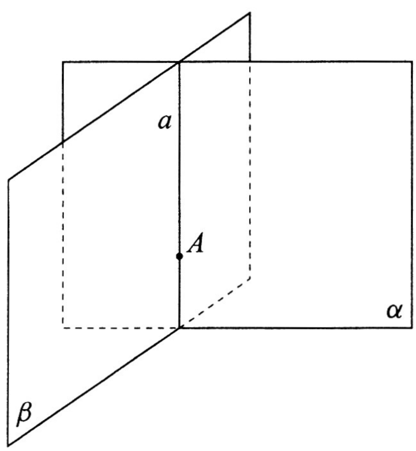
Šią aksiomą trumpiau galima pasakyti taip:

Jei du tiesės taškai priklauso plokštumai, tai tiesė yra plokštumoje.

Kai tiesė AB yra plokštumoje α, sakysime, kad plokštuma α eina per tiesę AB (2 pav.).

Šia aksioma remiamasi tikrinant liniuotės tiesumą (kai turime idealiai plokščią paviršių) arba paviršiaus plokštumą (kai turime idealiai tiesią liniuotę). Abiem atvejais, jei sutampa du liniuotės (tiesės) ir plokštumos (paviršiaus) taškai, turi sutapti ir visi kiti.

A3. *Jei dvi skirtingos plokštumos turi bendrą tašką, tai jos susikerta tiese, kurioje yra visi bendri tų plokštumų taškai.*



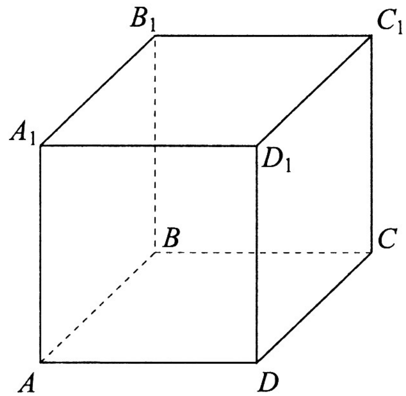
a — plokštumų α ir β susikirtimo tiesė.

3 pav.

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

1. Kiek plokštumų eina:
a) per dvi susikertančias tieses;
b) per tiesę ir šalia jos esantį tašką;
c) per vieną tiesę?

2. Pasidarykite kubo modelį. Jo viršūnes sužymėkite taip, kaip parodyta 4 paveikslėlyje. Kubo modelyje pademonstruokite ir išvardykite:
a) pagrindo plokštumos ABC ir šoninių kubo sienų susikirtimo tiesių atkarpas;
b) plokštumas, kurios kertasi tiese C_1D_1;
c) plokštumas, kurioms priklauso taškas C;
d) taškus, kurie priklauso plokštumoms A_1B_1B ir A_1AD.



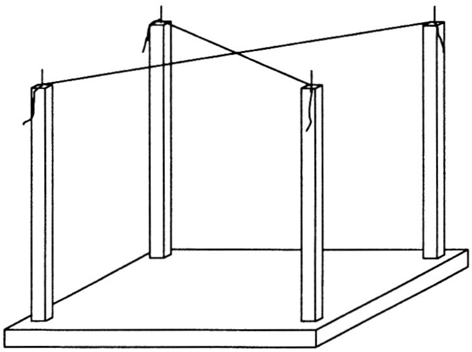
4 pav.

3. Ar apskritimo taškai yra vienoje plokštumoje?

4. Ar galima sukonstruoti:
a) erdvinį keturkampį, kurio ne visi taškai yra vienoje plokštumoje?
b) trikampį?

5. Keturi taškai nėra vienoje plokštumoje.
a) Ar trys iš jų gali būti vienoje tiesėje? Paaiškinkite, kodėl.
b) Kiek galima išvesti skirtingų plokštumų, kad kiekviena eitų per tris iš tų taškų?
Atsakydami naudokitės modeliu (pvz., gretasienio).

6. Ar keturkampio stalo kojų pagrindai vienoje plokštumoje, tikrinama ištempiant virveles taip, kaip parodyta 5 paveikslėlyje.
Kokią išvadą turėtų padaryti meistras, jei virvelės liečiasi; prasilenkia?



5 pav.

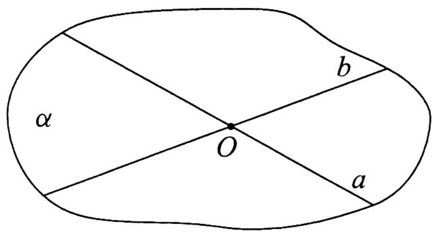
7. Taškas O yra apie lygiašonį trikampį ABC ($AB = BC$) apibrėžto apskritimo centras, taškas D — AC vidurys, taškas E nepriklauso trikampio plokštumai. Pasidarykite aprašytos situacijos modelį ir paaiškinkite, ar galima išvesti plokštumą per taškus D, O ir tiesę:
a) BE;
b) EC, jei kampas ABC — smailusis;
c) EC, jei kampas ABC — bukasis;
d) EC, jei kampas ABC — statusis.

8. Taškas O — stačiakampio $ABCD$ simetrijos centras. Taškas K nėra stačiakampio plokštumoje. Kiek galima išvesti plokštumų, kurioms priklausytų:
a) taškai B, O ir tiesė KD;
b) taškai A, C ir tiesė KD?

2 TIESĖS ERDVĖJE

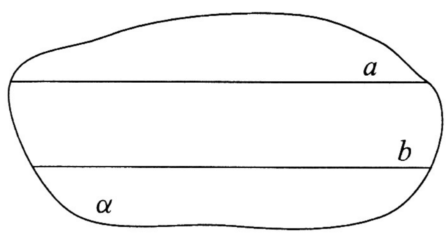
Dvi tiesės erdvėje gali susikirsti (6 pav.), būti lygiagrečios (7 pav.) arba prasilenkiančios (8, 9 pav.):

- *Susikertančios* tiesės yra vienoje plokštumoje ir turi vieną bendrą tašką.



6 pav.

- *Lygiagrečios* tiesės yra vienoje plokštumoje ir nesikerta (neturi bendrų taškų).

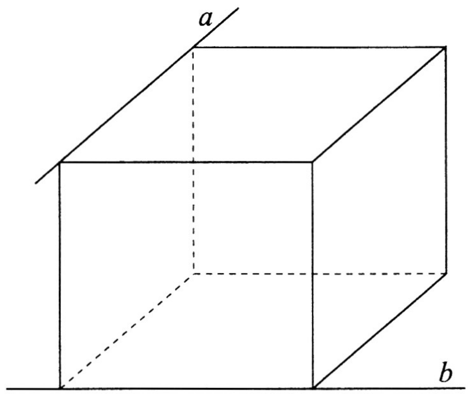


7 pav.

Tiesių lygiagretumą žymėsime ženklu $\parallel$, pavyzdžiui, $a \parallel b$.
Tiesių lygiagretumas erdvėje turi
simetriškumo savybę: jei $a \parallel b$, tai $b \parallel a$;
tranzityvumo savybę: jei $a \parallel b$, $b \parallel c$, tai $a \parallel c$.

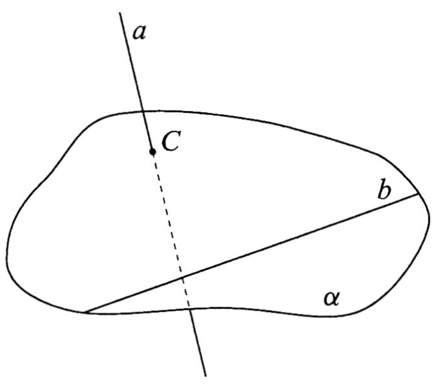
- *Prasilenkiančios* tiesės nėra vienoje plokštumoje.

  Prasilenkiančias tieses žymėsime ženklu $\dot{-}$, pavyzdžiui, $a \dot{-} b$.



8 pav.

Teorema. (Prasilenkiančių tiesių požymis.) *Jei viena tiesė* (b) *yra plokštumoje* (α), *o kita tiesė* (a) *tą plokštumą kerta taške* (C), *nepriklausančiame tiesei* (b), *tai tos tiesės* (a *ir* b) *yra prasilenkiančios* ($a \dot{-} b$) (9 pav.).



9 pav.

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

9. Kubo modelyje parodykite susikertančias, prasilenkiančias ir lygiagrečias tieses.

10. Raskite aplinkoje lygiagrečių ir prasilenkiančių tiesių pavyzdžių.

11. Kiek plokštumų galima išvesti per dvi lygiagrečias tieses? per dvi prasilenkiančias tieses?

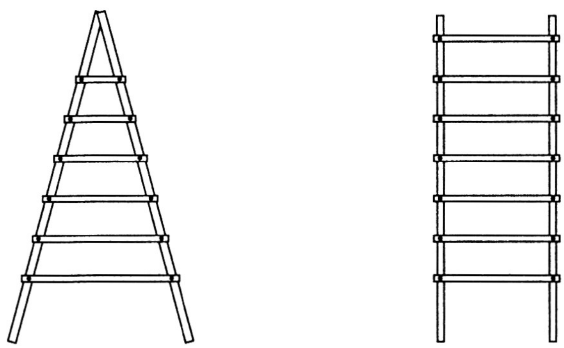
12. Duotas lygiagretainis. Ar yra plokštuma, kuriai priklauso tik trys lygiagretainio viršūnės? tik dvi? Atsakymą pagrįskite.

13. Taškas A nepriklauso trikampio KLM plokštumai.

a) Kiek iš viso galima nubrėžti tiesių per taškus A, K, L ir M, kad tiesėms priklausytų po du iš nurodytų taškų?

b) Ar tarp susidariusių tiesių yra lygiagrečių? prasilenkiančių?

14. Ar kopėčių skersiniai yra vienoje plokštumoje? Atsakymą pagrįskite.

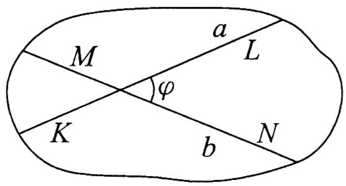


10 pav.

15. *Galvosūkis.* Iš šešių degtukų sukonstruokite keturis lygiakraščius trikampius.

3 KAMPAS TARP ERDVĖS TIESIŲ

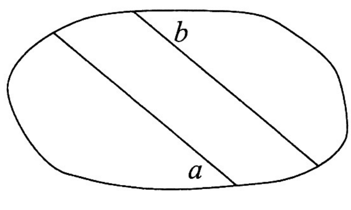
Jei tiesės *susikerta*, tai kampu tarp tiesių vadiname mažiausiąjį iš susidariusiųjų keturių kampų.



11 pav.

Kampą tarp tiesių žymėsime ženklu $\widehat{\ }$, pavyzdžiui, $a\widehat{\ }b = \varphi$ (arba $KL\widehat{\ }MN = \varphi$).

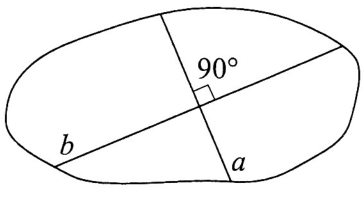
Jei tiesės yra *lygiagrečios*, tai kampas tarp jų lygus nuliui.



12 pav.

Pavyzdžiui, jei $a \parallel b$, tai $a\widehat{\ }b = 0°$.

Jei kampas tarp susikertančių tiesių yra 90°, tai sakome, kad jos yra *statmenos*.



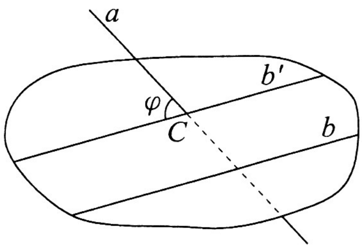
13 pav.

Statmenumą žymėsime ženklu $\perp$, pavyzdžiui, $a \perp b$.

Jei tiesės (a ir b) yra *prasilenkiančios*, tai kampas tarp jų apibrėžiamas taip:

1) per vieną iš duotosios tiesės (a) tašką (C) išvedame tiesę (b'), lygiagrečią su antrąja tiese (b) (14 pav.);
2) randame kampą (φ) tarp susikertančių tiesių (a ir b').

Šis kampas (φ) laikomas kampu tarp prasilenkiančių tiesių (a ir b).



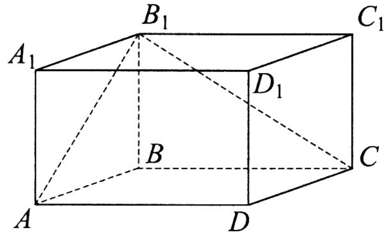
$$a^\frown b = a^\frown b' = \varphi.$$

14 pav.

Kampas φ tarp tiesių erdvėje negali būti didesnis už statųjį: $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

16. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kraštinės $AB = 4\,\text{cm}$, $AD = 3\,\text{cm}$, $AA_1 = 3\,\text{cm}$.



15 pav.

Kam lygus kampas tarp tiesių, kuriose yra kraštinės:

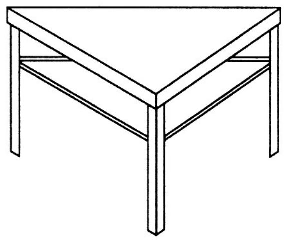
a) AD ir DC b) AD ir BC
c) B_1C_1 ir DC d) B_1C ir C_1C
e) AB ir CC_1 f) A_1D_1 ir BC
g) A_1D ir B_1C **h)** AB_1 ir A_1D?

Nurodymas. Pasinaudokite kosinusų teorema.

17. Trikampio stalelio viršus yra lygiakraštis trikampis. Jo kojos sutvirtintos skersiniais, lygiagrečiais su stalelio kraštais.

a) Kokius kampus sudaro skersiniai su kiekvienu stalelio kraštu?

b) Kokie būtų šie kampai, jei stalelio viršus būtų statusis lygiašonis trikampis?



16 pav.

18. Šalia rombo $KLMN$ plokštumos išvesta tiesė a, lygiagreti su įstrižaine LN.

a) Ar tiesės LM ir a susikerta?

b) Kiek plokštumų galima išvesti per tiesę a ir rombo kraštines arba įstrižaines? Kodėl?

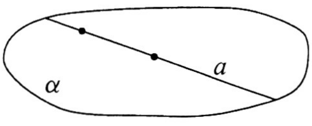
c) Apskaičiuokite kampus, kuriuos sudaro tiesė a su rombo kraštinėmis bei įstrižainėmis, jei kampas LKN yra 70°.

4 TIESĖ IR PLOKŠTUMA

4.1. Tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtys

Yra trys tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtys: tiesė yra plokštumoje (17 pav.), tiesė kerta plokštumą (18 pav.), tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios (19 pav.).

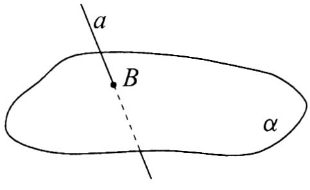
- Jeigu tiesė ir plokštuma turi du bendrus taškus, tai *tiesė yra plokštumoje.*



17 pav.

Tiesė a priklauso plokštumai α ($a \subset \alpha$) (žr. **A2**, p. 8).

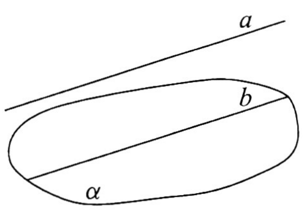
- Jeigu tiesė ir plokštuma turi tik vieną bendrą tašką, tai *tiesė kerta plokštumą.*



18 pav.

Taškas B yra tiesės a ir plokštumos α susikirtimo taškas.

- Jeigu tiesė ir plokštuma neturi bendrų taškų, tai *tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios.*



19 pav.

Tiesė a yra lygiagreti su plokštuma α ($a \parallel \alpha$).

Teorema. (Tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis.) *Jei plokštumoje* (α) *nesanti tiesė* (a) *lygiagreti su kuria nors toje plokštumoje esančia tiese* (b), *tai tiesė* (a) *yra lygiagreti su plokštuma* (α) (19 pav.).

Teoremos sąlyga (duota): $a \parallel b$, $a \not\subset \alpha$, $b \subset \alpha$.

Teoremos išvada (reikia įrodyti): $a \parallel \alpha$.

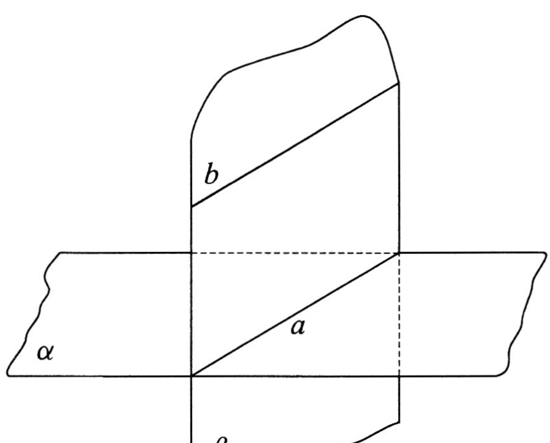
Šią teoremą įrodysime *prieštaros metodu*: tarsime, kad teoremos išvada neteisinga. Remdamiesi šia prielaida ir toliau samprotaudami, stengsimės gauti prieštarą teoremos sąlygai (arba jau žinomam teisingam teiginiui). Gauta prieštara reikš, kad mūsų prielaida neteisinga.

Įrodymas. Sąlygoje pasakyta, kad tiesė a nėra plokštumoje α. Vadinasi, ji kerta plokštumą (viename taške) arba yra su ja lygiagreti.

Tarkime, kad teoremos išvada neteisinga, ir tiesė a kerta plokštumą α kuriame nors taške M. Jei taškas M priklauso tiesei b, tai tiesės a ir b — susikertančios; jei taškas M nepriklauso tiesei b, tai tiesės a ir b prasilenkiančios (žr. prasilenkiančių tiesių požymį). Abu atvejai prieštarauja teoremos sąlygai, kurioje duota, kad $a \parallel b$. Mūsų prielaida, kad tiesė a kerta plokštumą α yra neteisinga, vadinasi, tiesė a lygiagreti su plokštuma α.

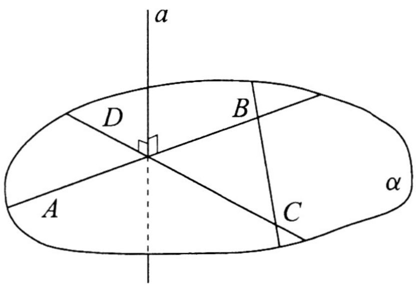
Teorema. *Jei plokštuma* (β) *eina per tiesę* (b), *lygiagrečią su kita plokštuma* (α), *ir kerta tą plokštumą, tai plokštumų susikirtimo tiesė* (a) *lygiagreti su ta tiese* (b) (20 pav.).

Teoremą įrodykite patys.



20 pav.

Apibrėžimas. Tiesė (a) vadinama statmena plokštumai (α), jei ji yra statmena kiekvienai tiesei, esančiai plokštumoje (21 pav.).



$a \perp \alpha$, nes
$a \perp AB$, $a \perp BC$, $a \perp CD, \ldots$

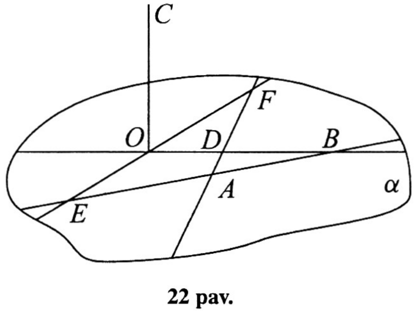
21 pav.

Teorema. (Tiesės ir plokštumos statmenumo požymis.) *Jei tiesė* (a) *statmena dviem susikertančioms tiesėms, esančioms plokštumoje, tai ji statmena ir tai plokštumai.*

Pavyzdžiui, stačiakampio gretasienio briauna AB (15 pav.) yra statmena BC ir BB_1, vadinasi, ji yra statmena ir plokštumai BB_1C_1, o tai reiškia, kad ji yra statmena bet kuriai tiesei, esančiai plokštumoje BB_1C_1, t.y. $AB \perp C_1C$, $AB \perp B_1C$, $AB \perp B_1C_1, \ldots$

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

19. Tiesė CO statmena plokštumai α (22 pav.). Kurioms plokštumoje α nubrėžtoms tiesėms ji yra statmena?



22 pav.

20. Plokštumą, kurioje yra rombas $ABCD$, kerta tiesė MC. Kurias rombo kraštines tiesė MC kerta? Su kuriomis prasilenkia? Su kurioms lygiagreti? (Paaiškinkite, kodėl.)

21. Trikampis ABC ir trapecija $ABDE$ nėra vienoje plokštumoje. Trapecijos pagrindai $AB = 6\,\text{cm}$ ir $DE = 9\,\text{cm}$.

a) Įrodykite, kad trapecijos vidurinė linija yra lygiagreti su trikampio plokštuma.

b) Apskaičiuokite trikampio vidurinės linijos, einančios per kraštinių AC ir BC vidurio taškus, ilgį.

c) Kokia trikampio vidurinės linijos padėtis trapecijos plokštumos atžvilgiu?

d) Apskaičiuokite trikampio ir trapecijos plotus, jei taškai E ir C nutolę per 5 cm nuo trikampio ir trapecijos plokštumų susikirtimo linijos.

22. Kaip praktiškai patikrinti, naudojantis stačiojo trikampio modeliu (kampainiu), ar strypas yra statmenas žemės plokštumai?

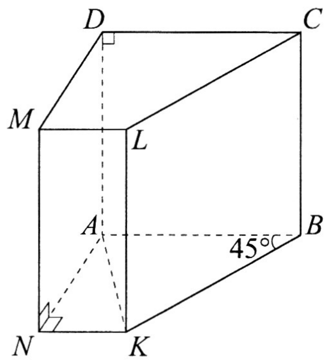
23. Kurioms stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienoms yra statmena jo briauna AA_1? briauna AB? briauna B_1C_1?

24. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briauna — 5 cm.

a) Kokia figūra susidarytų paeiliui sujungus taškus A, B_1, C_1, D? Atsakymą pagrįskite.

b) Apskaičiuokite tos figūros perimetrą ir plotą.

25. Duota (žr. 23 pav.): $MN \parallel KL \parallel BC \parallel AD$, $AB \parallel CD \parallel ML \parallel NK$, $MD \parallel AN$, kampai MNA, ANK ir ADC — statūs, o kampas $ABK =$ $= 45°$.



23 pav.

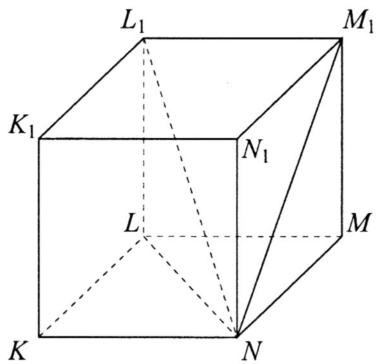
Kurie teiginiai yra teisingi:

a) $\angle DCB$ — status
b) $\angle DAB$ — status
c) $\angle ABC$ — nestatus
d) $\angle NAB$ — status
e) $\angle ADM$ — status
f) $\angle CDM$ — status
g) $AD \perp NAB$
h) $AD \perp AK$
i) $AD \perp NK$
j) $AD \widehat{\ } BK$ — smailus
k) $\angle KNM$ — status
l) $DM \widehat{\ } AK$ — smailus
m) $AN \perp ABC$
n) $BC \perp AM$
o) $BC \perp ADM$
p) $MN \perp ABK$
r) $AB \perp ADM$
s) $BK \perp ADC$
š) $AK \perp ABC$
t) $KL \widehat{\ } AB$ — smailus
u) $\angle LKN$ — status
v) $KN \perp BCL$?

4.2. Pasviroji plokštumai

Apibrėžimas. Tiesė vadinama *pasvirąja plokštumai*, jei ji kerta tą plokštumą ir nėra jai statmena.

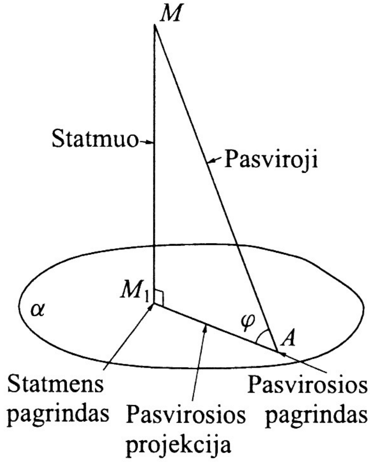
Pavyzdžiui, kubo $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (24 pav.) įstrižainė L_1N ir kubo sienos įstrižainė M_1N yra pasvirosios kubo pagrindo plokštumai $K_1L_1M_1$ ir sienai LL_1M_1M. (Kurioms dar kubo sienoms minėtos įstrižainės yra pasvirosios?)



24 pav.

Iš taško (M) (25 pav.) išveskime statmenį ir pasvirąją plokštumai (α). Statmens ir pasvirosios susikirtimo su plokštuma taškus (M_1 ir A) vadiname *statmens ir pasvirosios pagrindais*. Statmens MM_1 ilgis — taško M atstumas nuo plokštumos α.

Atkarpa M_1A, jungianti statmens ir pasvirosios pagrindus, vadinama *pasvirosios* (MA) *projekcija plokštumoje.*



25 pav.

Apibrėžimas. Kampas $(\angle MAM_1)$ tarp pasvirosios (MA) ir jos projekcijos (M_1A) plokštumoje vadinamas *kampu tarp pasvirosios* (MA) *ir plokštumos* (α).

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

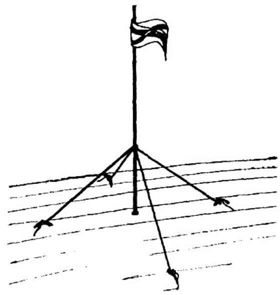
26. Pasakykite 24 paveikslėlyje plokštumai KLM nubrėžtų pasvirųjų L_1M ir M_1M projekcijas.

27. Nubraižykite stačiakampio gretasienio bet kurios įstrižainės projekcijas visose stačiakampio gretasienio sienose.

28. Salės ilgis yra 20 m, plotis — 15 m. Prožektorius pakabintas viename salės kampe 4 m aukštyje. Koks salės grindų kampų apšviestumas, jei jis apskaičiuojamas pagal formulę: $E = \frac{J \cdot h}{R^3}$, J — šaltinio šviesos stiprumas kandelomis (cd), R — atstumas nuo šviesos šaltinio metrais (m), h — statmens apšviečiamam paviršiui ilgis metrais (m), E — apšviestumas liuksais (lx) (prožektoriaus stiprumas 640 cd)?

29. Iš taško M, nepriklausančio plokštumai α, išvestas statmuo MM_1 ir dvi pasvirosios AM ir BM. Ką galite pasakyti apie pasvirųjų AM ir BM projekcijas plokštumoje α, jei žinoma, kad $BM > AM$? Apskaičiuokite projekcijų ilgius, jeigu $MM_1 = 4$; $BM = 10$; $AM = 5$.

30. Laivo vėliavos stiebas prie denio pritvirtintas keturiomis atatampomis. Kiekviena atatampa su denio plokštuma sudaro 30° kampą (26 pav.). Kiek lyno sunaudota atatampoms, jei jos pritvirtintos 2 m aukštyje, o tvirtinimo kilpoms reikia 5% vienos atatampos ilgio?



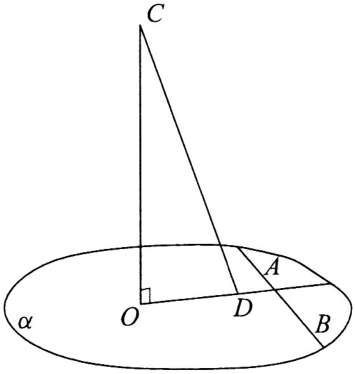
26 pav.

31. Iš keturkampės sijos norime išpjauti trinkelę. Kaip ir kiek reikia mažiausiai nubrėžti tiesių, kad pagal jas pjaunant pjūvio plokštuma būtų statmena sijos briaunai?

32. Kokia gali būti tarpusavio padėtis dviejų tiesių:
a) statmenų tai pačiai trečiai tiesei;
b) statmenų tai pačiai plokštumai? (Parodykite modelyje.)

4.3. Trijų statmenų teorema

Teorema. *Jei plokštumos tiesė yra statmena į plokštumą išvestos pasvirosios projekcijai toje plokštumoje, tai ji statmena ir pasvirajai* (27 pav.).



27 pav.

Duota: $AB \subset \alpha$,
CD — pasviroji,
DO — pasvirosios projekcija,
$CO \perp \alpha$,
$AB \perp OD$.
Įrodyti: $AB \perp CD$.

Įrodymas.

1) $CO \perp AB$, nes $CO \perp \alpha$; $DO \perp AB$ (duota). Vadinasi, tiesė AB statmena plokštumai ODC.

2) Kadangi tiesė AB statmena plokštumai ODC, tai ji (AB) statmena ir bet kuriai tos plokštumos (ODC) tiesei, t. y. $AB \perp CD$.

Suformuluokite ir įrodykite atvirkštinę teoremą.

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

33. Ar gali pasviroji plokštumai sudaryti statų kampą su tiese, esančia plokštumoje? (Parodykite modelyje.)

34. Iš taisyklingojo trikampio ABC centro O iškeltas statmuo OM į trikampio plokštumą. Atkarpos MA, MB ir MC yra lygios trikampio kraštinėms.

a) Paaiškinkite, kur yra taisyklingojo trikampio centras. Kokiomis savybėmis jis pasižymi?

b) Apskaičiuokite atkarpos AO ilgį, jei trikampio kraštinė lygi a.

c) Įrodykite, kad trikampiai AMO, BMO ir CMO yra lygūs.

d) Pavaizduokite pasvirųjų MA, MB ir MC projekcijas ir apskaičiuokite trikampio plokštumos ir šių pasvirųjų sudaromus kampus.

e) Nustatykite trikampių AMB, AMC ir BMC rūšį.

f) Apskaičiuokite tiesių MA, MB, MC ir trikampio kraštinių sudaromus kampus.

g) Kurių iš šių kampų didumas priklauso nuo statmens OM ilgio, kurių nepriklauso?

35. Iš trikampio KLM viršūnės K nuleistas statmuo KN į trikampio plokštumą. Trikampio kraštinė $KL = 8\,\text{cm}$, $LM = 6\,\text{cm}$, $MK = 10\,\text{cm}$, o statmens KM ilgis $3\,\text{cm}$.

a) Nustatykite trikampio KLM rūšį (kampų atžvilgiu).

b) Nustatykite trikampių KLN, KMN ir LMN rūšį (kampų atžvilgiu).

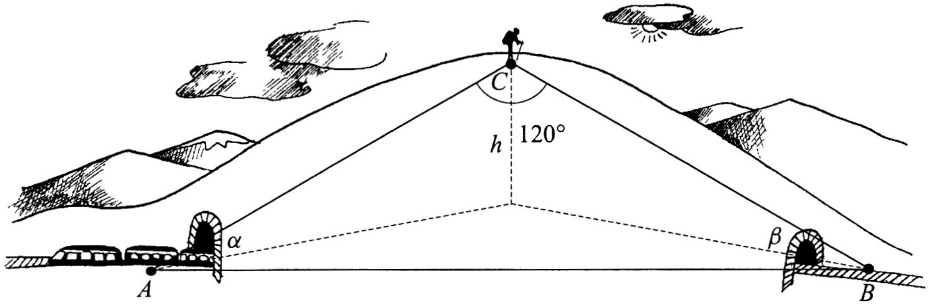
c) Apskaičiuokite taško N atstumą nuo trikampio KLM viršūnių.

d) Apskaičiuokite taško N atstumą nuo trikampio KLM kraštinių.

e) Apskaičiuokite tiesių MN ir LN kampus (minučių tikslumu) su trikampio LKM plokštuma.

f) Kaip išsidėstę taškai, vienodai nutolę nuo trikampio KLM viršūnių?

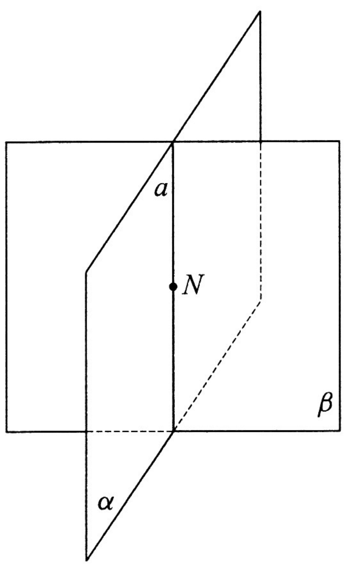
36. Alpinistas iš kalnų aikštelės mato tunelio pradžios ir galo taškus A ir B $120°$ kampu. Jis žino, kad aikštelė yra h m virš tunelio plokštumos, taškas C, kuriame stovi alpinistas, iš taško A matomas kampu α, o iš taško B — kampu β virš tunelio plokštumos (žr. 28 pav.). Apskaičiuokite tunelio ilgį.



28 pav.

5 PLOKŠTUMŲ LYGIAGRETUMAS IR STATMENUMAS

Dvi plokštumos gali kirstis arba būti lygiagrečios. Dvi skirtingos plokštumos (α ir β), turinčios bendrą tašką (N), kertasi tiese (a), einančia per tą tašką (29 pav.).



29 pav.

$N \subset \alpha, \beta,$
$a \subset \alpha, \beta$ ir $N \subset a.$

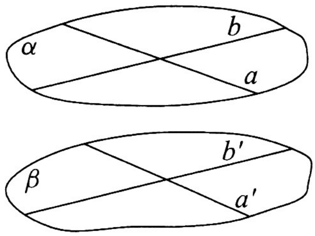
Ar gali būti bendrų plokštumų α ir β taškų, nepriklausančių tiesei a? (Žr. **A3**, p. 8.)

5.1. Plokštumų lygiagretumas

Apibrėžimas. Dvi plokštumos, neturinčios bendrų taškų, vadinamos *lygiagrečiosiomis*.

Plokštumų lygiagretumą (kaip ir tiesių lygiagretumą) žymėsime ženklu ||, pavyzdžiui, $\alpha \parallel \beta$.

Teorema. (Plokštumų lygiagretumo požymis.) *Jei vienos plokštumos* (α) *dvi susikertančiosios tiesės* (a *ir* b) *yra lygiagrečios su kitos plokštumos* (β) *dviem susikertančiosiomis tiesėmis* (a' *ir* b'), *tai tos plokštumos yra lygiagrečios* ($\alpha \parallel \beta$).



$a, b \subset \alpha, a', b' \subset \beta;$
$a \parallel a', b \parallel b';$
$\alpha \parallel \beta.$

30 pav.

Teorema. *Jei tiesė statmena vienai iš dviejų lygiagrečių plokštumų, tai ji statmena ir antrajai plokštumai.*

Apibrėžimas. Lygiagrečių plokštumų bendrojo statmens dalies, esančios tarp jų, ilgis vadinamas *atstumu tarp lygiagrečių plokštumų.*

Įrodykite prieštaros metodu šią lygiagrečių plokštumų savybę:

Teorema. *Jei dvi lygiagrečias plokštumas kerta trečia plokštuma, tai plokštumų susikirtimo tiesės yra lygiagrečios.*

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

37. Pateikite lygiagrečių plokštumų pavyzdžių iš aplinkos.

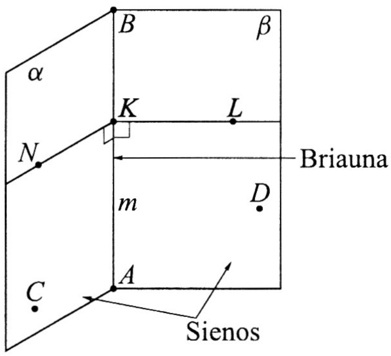
38. Tiesės AB ir CD susikerta taške M. Taškai A ir C yra vienoje iš lygiagrečių plokštumų, taškai B ir D — antroje.
a) Kokia yra tiesių AC ir BD tarpusavio padėtis (susikerta, lygiagrečios, prasilenkia)?
b) Kokie yra trikampiai AMC ir BMD (lygūs, statūs, panašūs, lygiašoniai ir pan.)?
c) Kur yra taškas M (tarp plokštumų, į vieną pusę nuo plokštumų), kam lygios atkarpos CM ir CD, jei $AM = 2AB$, $DM = 12\,\text{cm}$?
d) Apskaičiuokite CM ir CD, jei $AB = 3AM$ ir $DM = 12\,\text{cm}$ (išnagrinėkite visas galimas taško M padėtis).

39. Tiesė AB yra plokštumoje α, o CD — plokštumoje β. Kokia gali būti tiesių AB ir CD tarpusavio padėtis, jei:
a) plokštumos α ir β susikerta;
b) plokštumos α ir β yra lygiagrečios? (Parodykite modelyje.)

5.2. Kampas tarp plokštumų. Plokštumų statmenumas

Jei dvi plokštumos kertasi, galima kalbėti apie jų sudaromus kampus. (Prisiminkite kampus, gautus kertantis dviem tiesėms.) Kertantis dviem plokštumoms, susidaro keturi dvisieniai kampai (29 pav.).

Apibrėžimas. Kampas, kurį sudaro dvi pusplokštumės, turinčios bendrą briauną, vadinamas *dvisieniu kampu*. Dvisienis kampas žymimas taip: $\angle CABD$ arba $\angle \alpha m \beta$ (31 pav.).



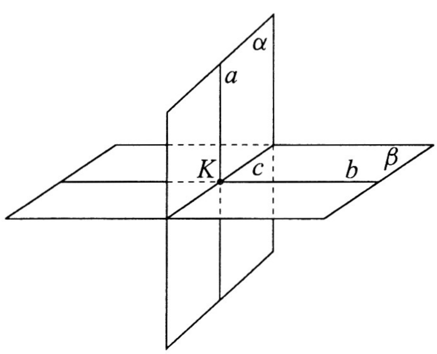
$$\angle CABD = \angle NKL.$$

31 pav.

Norėdami išmatuoti dvisienį kampą, iš bet kurio briaunos taško (K) abiejose kampo sienose išveskime statmenis briaunai (KN ir KL). Kampo NKL (31 pav.) didumą vadinsime dvisienio kampo $CABD$ didumu.

Apibrėžimas. Jei vienas iš keturių dvisienių kampų, gautų susikirtus dviem plokštumoms, yra status, tai tokios plokštumos vadinamos *statmenomis*.

Teorema. (Plokštumų statmenumo požymis.) *Jei plokštuma eina per statmenį kitai plokštumai, tai tos plokštumos yra statmenos.*



Duota: $a \perp \beta$, $a \subset \alpha$.
Įrodyti: $\alpha \perp \beta$.

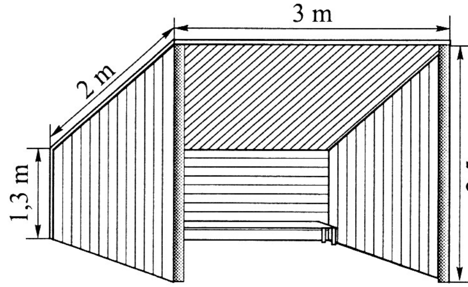
32 pav.

Įrodymas. Per statmens a pagrindą K plokštumoje β brėžiame tiesę b, statmeną tiesei c (c — plokštumų α ir β susikirtimo tiesė). Tiesių a ir b sudaryto kampo didumas yra dvisienio kampo $\alpha c \beta$ didumas. Kadangi tiesė a statmena plokštumai β (duota), tai ji statmena ir tiesei b, esančiai toje plokštumoje. Vadinasi, $a \widehat{\ } b = 90°$.

Įrodėme, kad vienas iš dvisienių kampų yra status, todėl plokštumos α ir β yra statmenos.

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

40. Pavėsinės stačiakampio stogelio vienas kraštas nutolęs nuo žemės 1,3 m, antras — 2,5 m. Stogelio plotis lygus 2 m, ilgis — 3 m.
a) Koks atstumas tarp stogelį laikančių stulpų?
b) Kokį kampą sudaro stogelis su žeme?
c) Koks pavėsinės sienų plotas, jei pavėsinė yra be priekinės sienos (žr. 33 pav.)?

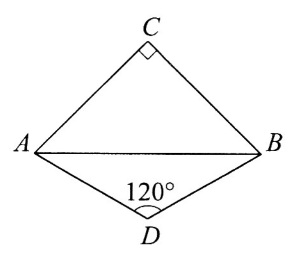


33 pav.

41. Lygiašonio trikampio (2 m, 2 m, 3 m) formos plokštė viršūne atremta į namo sieną. Plokštės lygiosios kraštinės su žeme sudaro 30° kampus.
a) Kokiame aukštyje nuo žemės yra trikampio viršūnė?
b) Kokį kampą sudaro plokštė su žeme?

42. Sugalvokite praktinę situaciją, kai reikia išmatuoti dvisienį kampą.

43. Popieriaus lape nubraižyti du lygiašoniai trikampiai ABC ir ABD, kurių pagrindas AB bendras, o kampai prie viršūnių C ir D atitinkamai lygūs 90° ir 120° (žr. 34 pav.). Kokiu kampu reikia sulenkti lapą, kad viršūnės C projekcija trikampio ABD plokštumoje sutaptų su D?



34 pav.

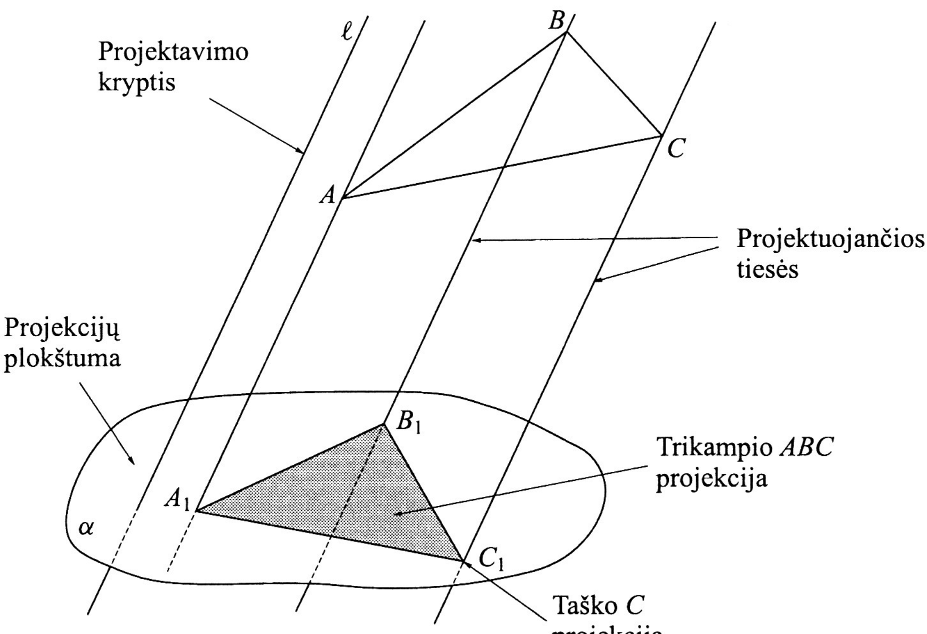
6 LYGIAGRETUSIS PROJEKTAVIMAS

Vaizduojant erdvinius kūnus plokštumoje, dažnai naudojamasi lygiagrečiuoju projektavimu.

Sakykime, kad erdvėje duota plokštuma α ir tiesė ℓ, nelygiagreti su plokštuma α. Plokštumą α pavadinkime *projekcijų plokštuma*, o tiesę ℓ — projektavimo kryptimi.

Visos tiesės, lygiagrečios projektavimo krypčiai, vadinamos *projektuojančiomis tiesėmis.*

Taškas, kuriame projektuojanti tiesė, einanti per duotąjį tašką, kerta projekcijų plokštumą, vadinamas duotojo *taško projekcija.*



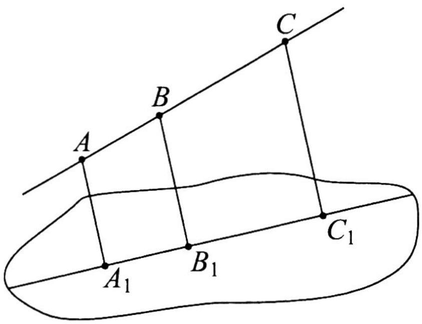
35 pav.

Apibrėžimas. *Figūros lygiagrečiąja projekcija* vadiname visų duotosios figūros taškų lygiagrečių projekcijų aibę (visumą).

Atlikite 44 užduotį ir įsitikinkite, kad teisingos kitame skyrelyje be įrodymo pateiktos lygiagrečiojo projektavimo savybės.

6.1. Lygiagrečiojo projektavimo savybės

1. Taško projekcija yra taškas.
2. Tiesės projekcija yra tiesė arba taškas.
3. Lygiagrečių tiesių projekcijos yra lygiagrečios tiesės arba taškai.
4. Atkarpòs, lygiagrečiòs projekcijų plokštumai, projekcija yra lygiagreti ir lygi projektuojamajai atkarpai. (Pamėginkite tai įrodyti.)
5. Atkarpų esančių vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse ilgių santykis lygus tų atkarpų projekcijų ilgių santykiui.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$$

36 pav.

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

44. *Užduotys saulėtą dieną klasėje arba namie.* Saulės spindulius galima laikyti lygiagrečiomis tiesėmis, tada figūros šešėlis mūsų pasirinktoje (pvz., stalo paviršiaus) plokštumoje bus figūros lygiagrečioji projekcija toje plokštumoje.

a) Ar kvadrato projekcija (šešėlis) gali būti bet kuris lygiagretainis? stačiakampis? rombas? trapecija? trikampis? atkarpa? taškas?

b) Ar lygiakraščio trikàmpio projekcija gali būti bukasis; statusis; smailusis įvairiakraštis; lygiašonis; lygiakraštis trikampis? keturkampis; atkarpa; taškas?

c) Kada lygių atkarpų projekcijos lygios? (Panagrinėkite susikertančiose, lygiagrečiose, prasilenkiančiose tiesėse ir vienoje tiesėje esančias atkarpas, pvz., karkasinio kubo briaunų projekcijas.)

d) Ar taško M projekcija dalija atkarpos projekciją santykiu $1 : 2$, jei taškas M dalija atkarpą santykiu $1 : 2$?

e) Ar trikampio projekcijoje viena kraštinė bus du kartus ilgesnė už kitą, jei projektuojamajame trikampyje ji yra du kartus ilgesnė už kitą?

45. Kokia figūra yra projektuojančios tiesės projekcija?

46. Ar gali dviejų lygiagrečių tiesių projekcijos būti:

a) du taškai? b) tiesė ir taškas?
c) lygiagrečios tiesės? d) susikertančios tiesės?
e) viena tiesė? f) vienas taškas?

Jei taip, tai kada? Pademonstruokite.

47. Ar gali dviejų susikertančių tiesių projekcija būti:

a) du taškai? b) dvi susikertančios tiesės?
c) tiesė? d) tiesė ir taškas šalia jos?

Jei taip, tai kada? Pademonstruokite.

48. Ar gali dviejų prasilenkiančių tiesių projekcija būti:

a) du taškai? b) viena tiesė?
c) tiesė ir taškas šalia jos? d) dvi susikertančios tiesės?
e) dvi lygiagrečios tiesės? f) tiesė ir taškas ant jos?

Jei taip, tai kada? Pademonstruokite.

49. Ar gali stačiojo kampo projekcija būti:

a) statusis kampas? b) bukasis kampas?
c) smailusis kampas? d) spindulys?
e) taškas? f) ištiestinis kampas?

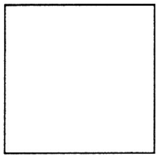
Tuo įsitikinkite, stebėdami stačiojo trikampio šešėlį.

50. Ar trikampio aukštinės, pusiaukraštinės, pusiaukampinės projekcija yra gauto trikampio projekcijos aukštinė, pusiaukraštinė, pusiaukampinė?

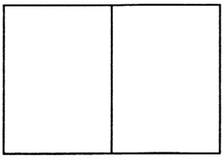
51. Projektavimo kryptis nėra lygiagreti kvadrato plokštumai. Kurios kvadrato savybės išlieka jo projekcijoje?

52. Projektavimo kryptis statmena sąsiuvinio plokštumai. Parodykite, kokioje padėtyje yra kubas, jei jo projekcija sąsiuvinyje yra:

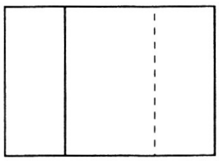
a) kvadratas



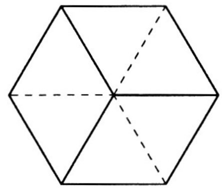
b) du lygūs stačiakampiai



c) du nelygūs stačiakampiai

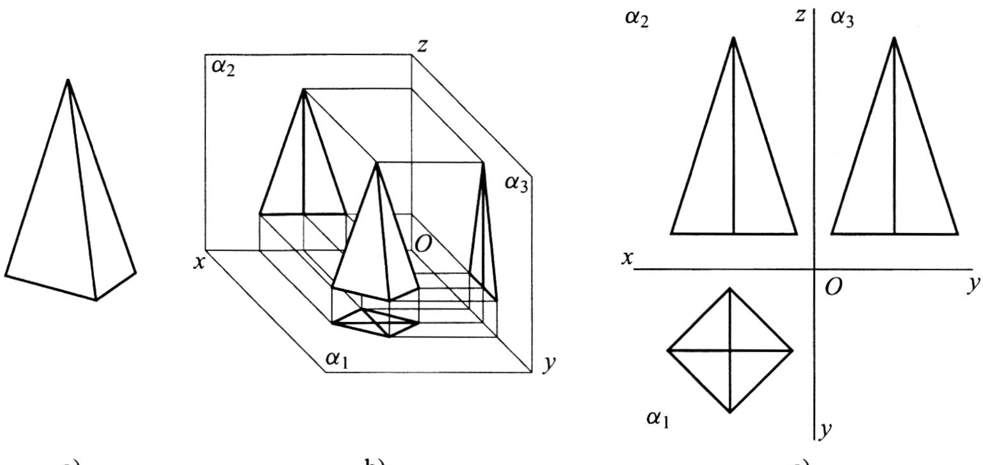


d) šešiakampis



6.2. Kūnų projekcijų braižymas

Lygiagrečiosios projekcijos, kai projektuojanti tiesė yra statmena projekcijų plokštumai, vadinamos *statmenosiomis* (*ortogonaliosiomis*) projekcijomis. Technikoje dažnai braižomos kokio nors kūno *statmenosios* (*ortogonaliosios*) projekcijos į tris tarpusavyje statmenas plokštumas xOy, xOz ir yOz. Iš šių projekcijų galima susidaryti erdvinį paprasto kūno vaizdą.

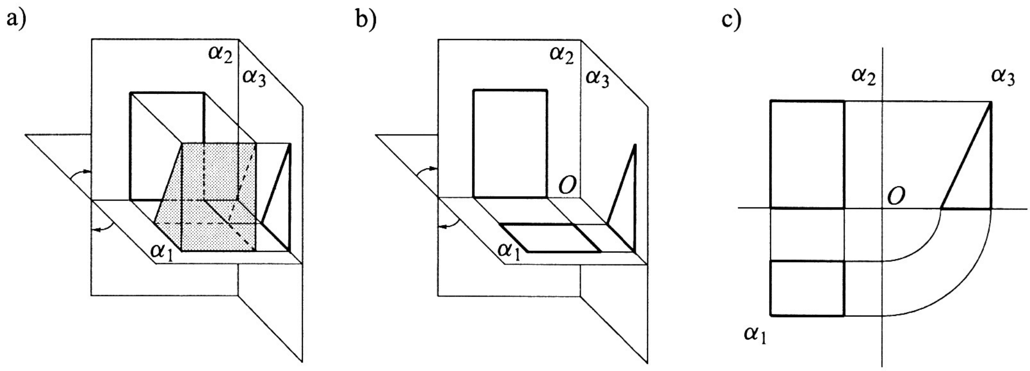


a) b) c)

37 pav.

Plokštumoje α_1 (xOy) gautas vaizdas (projekcija) vadinamas *vaizdu iš viršaus*, arba *horizontaliąja projekcija*. Plokštumoje α_2 (xOz) gauta projekcija vadinama *vaizdu iš priekio*, arba *frontaline projekcija*. Plokštumoje α_3 (yOz) — *vaizdu iš šono*, arba *profiline projekcija*.

Visos projekcijos plokštumoje braižomos taip: vaizdas iš viršaus braižomas tiksliai po vaizdu iš priekio, vaizdas iš kairiojo šono — į dešinę nuo vaizdo iš priekio ir viename lygyje su juo (37, 38 pav.). Techniniuose brėžiniuose projekcijų ašys Ox, Oy ir Oz nebraižomos.



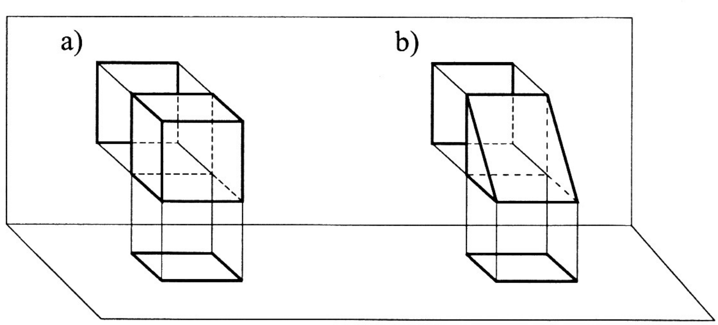
38 pav.

Kūno matmenys iš horizontaliosios projekcijų plokštumos (α_1) į profilinę projekcijų plokštumą α_3 perkeliami brėžiant lankelius iš centro O (žr. 38 c pav.).

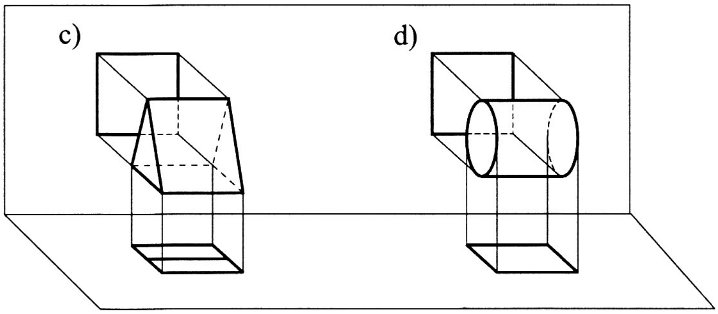
Nesudėtingų kūnų kartais braižomos tik dvi projekcijos (82 pav.).

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

53. Nubraižykite 39 paveikslėlyje pavaizduotų kūnų visas tris projekcijas, kaip tai parodyta 37 ir 38 paveikslėliuose. Kurios atkarpos horizontaliojoje projekcijoje pavaizduotos savo tikruoju ilgiu?

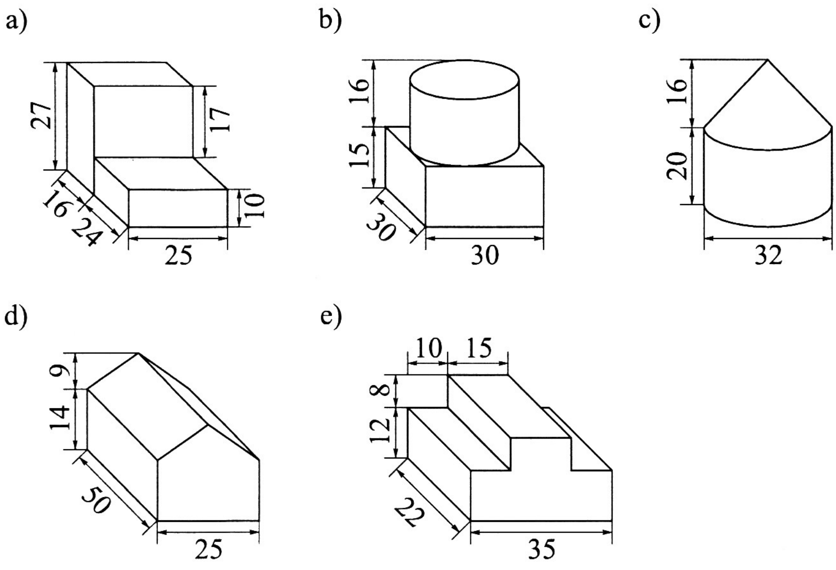


39 pav.



39 pav. (tęsinys)

54. Nubraižykite 40 paveikslėlyje pavaizduotų kūnų visas tris projekcijas.

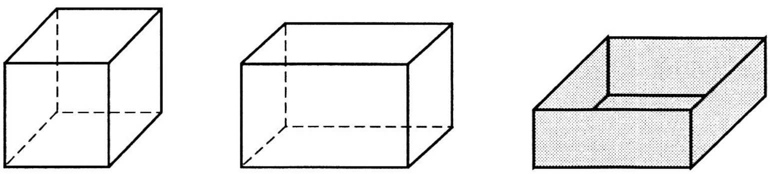


40 pav.

55. Kurių 40 paveikslėlyje pavaizduotų kūnų dvi projekcijos būtų tokios pat?

7 PRIZMĖ

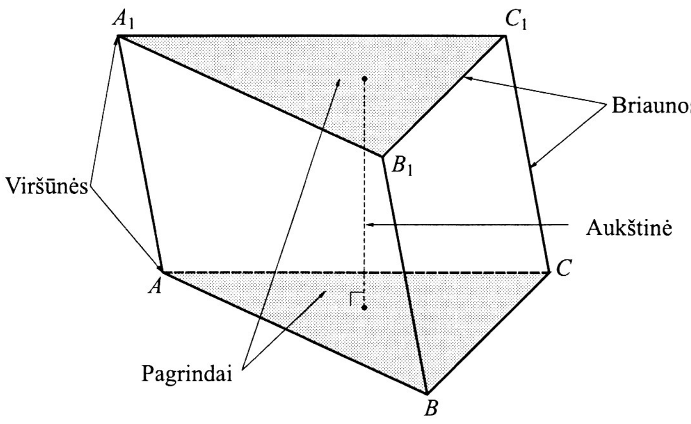
Briaunainiù vadiname kūną, apribotą daugiãkampių. Pavyzdžiui, kùbas — kūnas, apribotas šešių kvadratų; stačiakampį gretãsienį riboja šeši stačiãkampiai. Atvira dėžutė, sudaryta iš penkių stačiãkampių, nevadinama briaunainiu (41 pav.).



41 pav.

Toliau nagrinėsime briaunainius, vadinamus *prìzmėmis*.
Sukonstruokime trikampę prizmę:

1) imame bet kurį trikampį ABC;
2) per trikampio ABC viršūnes išvedame lygiagrečias tieses, nepriklausančias trikampio plokštumai;
3) tiesėse atidedame lygias atkarpas: $AA_1 = BB_1 = CC_1$;
4) sujungiame taškus A_1, B_1 ir C_1.



42 pav.

Įrodykite patys, kad keturkampiai AA_1C_1C, AA_1B_1B ir BB_1C_1C yra lygiagretainiai, o $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (42 pav.).

Apibrėžimas. Kūną, apribotą gautų trijų lygiagretainių ir dviejų lygių trikampių, vadiname *trikampè prizmè.*

Lygiagretainius vadiname prizmės *šoninėmis sienomis*, jų kraštines — *prizmės briaunomis*, trikampius — *prizmės pagrindais*. Briaunų susikirtimo taškus vadiname *prizmės viršūnėmis*. Statmuo, nuleistas iš bet kurio viršutinio pagrindo taško į apatinio pagrindo plokštumą, vadinamas *prizmės aukštine*.

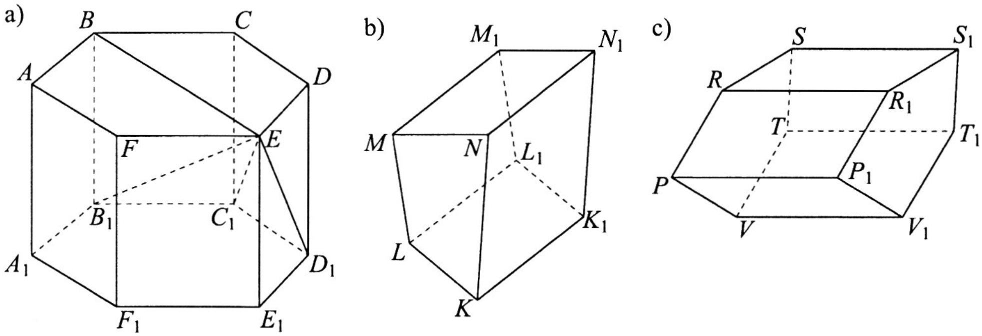
Tokiu pačiu būdu galima sukonstruoti *keturkam̃pę prìzmę* (pagrindai keturkampiai), *šešiakam̃pę prizmę* (pagrindai šešiãkampiai) ir t. t. (Prizmių pagrindai — lygūs daugiakampiai.)

Jei prizmės pagrindas — lygiagretainis, ji dar vadinama *gretãsieniu.*

Apibrėžimas. Prizmė, kurios šoninės briaunos statmenos pagrindams, vadinama *stačiąja prizme* (priešingu atveju — *pasvirąja prizme*).

Apibrėžimas. Stačioji prizmė, kurios pagrindas lygiagretainis, vadinama *stačiuoju gretãsieniu.*

Apibrėžimas. Stačioji prizmė, kurios pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai, vadinama *taisyklingąja prizme*.



43 pav.

43 paveikslėlyje pavaizduota:

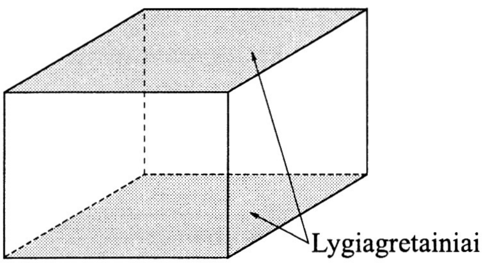
a) Taisyklingoji šešiakampė prizmė $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

b) Netaisyklingoji keturkampė prizmė, kurios pagrindai — keturkampiai $KLMN$ ir $K_1L_1M_1N_1$.

c) Netaisyklingoji penkiakampė prizmė, kurios pagrindai — penkiakampiai $PRSTV$ ir $P_1R_1S_1T_1V_1$.

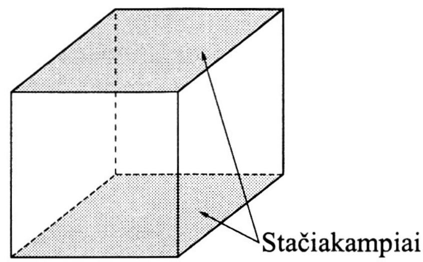
Apibrėžimas. Statusis gretasienis, kurio pagrindas stačiãkampis, vadinamas *stačiakampiù gretãsieniu.*

Statusis gretasienis



44 pav.

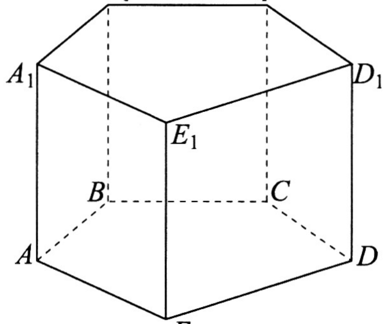
Stačiakampis gretasienis



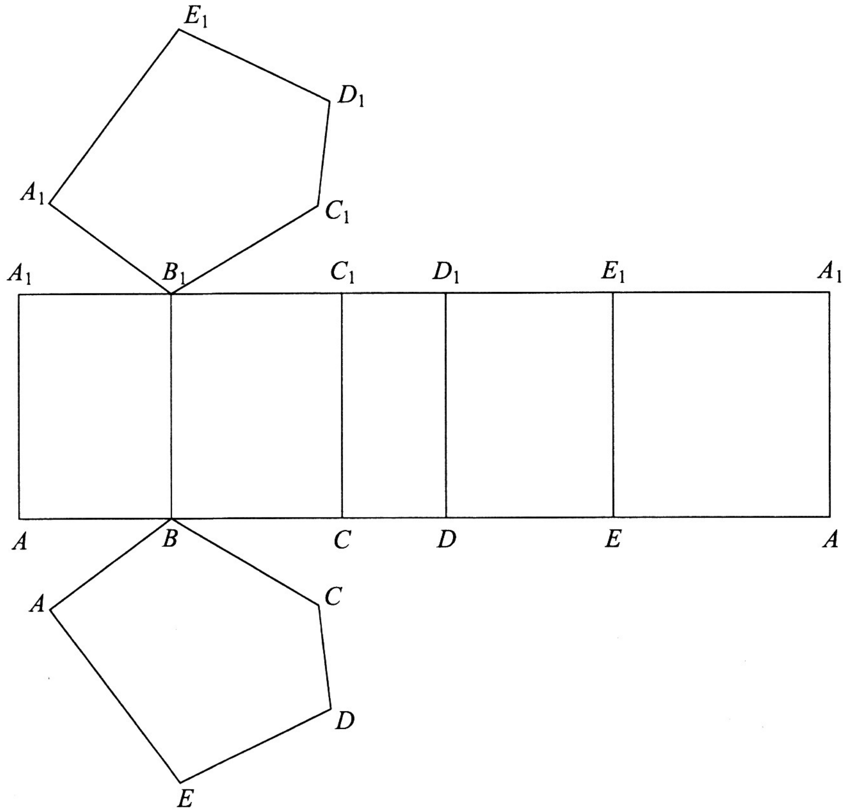
45 pav.

Prizmės paviršiaus plotą galima apskaičiuoti, sudėjus visų prizmės sienų plotus.

Pavyzdžiui: 46 a pav. pavaizduotos stačiosios prizmės paviršiaus plotą sudaro dviejų lygių penkiakampių $ABCDE$ ir $A_1B_1C_1D_1E_1$ ir penkių stačiakampių AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, DD_1E_1E ir EE_1A_1A plotų suma (žr. 46 b pav.).



46 a pav.



46 b pav.

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

56. Apibrėžkite prizmės įstrižaines (43 a pav. EB_1, EC_1 — prizmės įstrižainės, o EB, ED_1 — nėra prizmės įstrižainės).

57. Kiek įstrižainių turi prizmė:
a) keturkampė; b) penkiakampė; c) šešiakampė; d) n-kampė?

58. Įrodykite, kad prizmės pagrindai yra lygiagrečiose plokštumose.

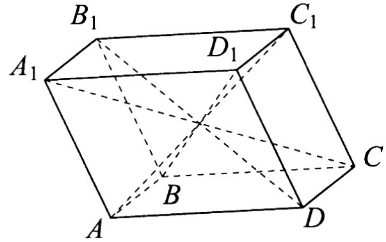
59. Įrodykite, kad taisyklingosios prizmės šoninės sienos yra lygūs stačiakampiai.

60. Raskite kampus tarp tiesių, kuriose yra 43 paveikslėlyje pavaizduotos taisyklingosios šešiakampės prizmės briaunos:
a) AA_1 ir AF; b) A_1B_1 ir AF; c) A_1B_1 ir EF;

d) A_1F_1 ir CD (prisiminkite taisyklingojo šešiakampio savybes).

e) Kokį kampą sudaro prizmės įstrižainės EB_1 ir EC_1 su pagrindo plokštuma, jei pagrindo kraštinė ir šoninė briauna yra lygios a?

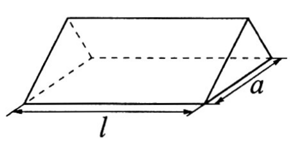
61. Įrodykite, kad gretasienio įstrižainės kertasi viename taške, kuris yra įstrižainių vidurio taškas.



47 pav.

Nurodymas. Nusibraižykite gretasienį. Sujunkite viršūnes, nesančias vienoje sienoje, t. y. išveskite jo įstrižaines (47 pav.). Iš pradžių nagrinėkite lygiagretainių A_1B_1CD ir A_1D_1CB įstrižaines, remkitės lygiagretainio įstrižainių savybe.

62. Sausainių dėžutė yra taisyklingosios trikampės prizmės pavidalo (48 pav.). Kiek reikia popieriaus visai dėžutei apklijuoti, jei jos ilgis $l = 24$ cm, plotis $a = 6$ cm?



48 pav.

63. Ar užsidarys dėžutė, kurios matmenys 10 cm, 5 cm, 3 cm, jei į ją įdėsime: a) 15 cm ilgio pieštuką; b) 11 cm ilgio tušinuką?

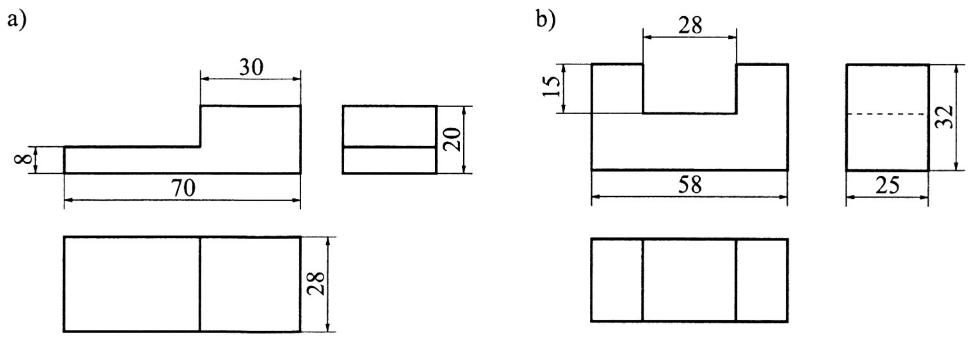
64. Apskaičiuokite taisyklingosios šešiakampės prizmės (43 a pav.) paviršių, jei:

a) šoninė briauna lygi 2,5 dm, o pagrindo kraštinė — 9 cm;

b) šoninė briauna lygi 35 cm, o ilgiausia pagrindo įstrižainė — 1,4 dm.

65. Stačiosios prizmės pagrindas — rombas, kurio kraštinė a, o smailusis kampas α. Mažesnioji prizmės įstrižainė pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu β.
a) Apskaičiuokite įstrižainių projekcijų ilgius.
b) Apskaičiuokite prizmės aukštinę.
c) Raskite prizmės pagrindų ir šoninių sienų plotus, kai:
1) $a = 6\,\text{m}$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$;
2) $a = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$;
3) $a = 7{,}5$, $\alpha = 75°$, $\beta = 56°$.
(Naudodamiesi trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelėmis ir skaičiuokliu, apskaičiuokite prizmės paviršiaus plotą pasirinktu tikslumu.)

66. Iš trijų briaunainio projekcijų (49 pav.) nupieškite jo erdvinį vaizdą ir apskaičiuokite paviršiaus plotą (matmenys duoti milimetrais).



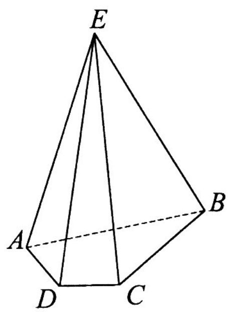
49 pav.

67. Musė turi nukeliauti iš keturkampės taisyklingosios prizmės $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnės A į A_1, pereidama visas šonines sienas. Kokiu kampu ji turi kirsti šonines briaunas, kad kelias būtų trumpiausias? Prizmės šoninės sienos matmenys: $AB = 2\,\text{cm}$, $AA_1 = 8\,\text{cm}$.

8 PIRAMIDĖ

Sukonstruokime briaunainį, vadinamą *piramide*:

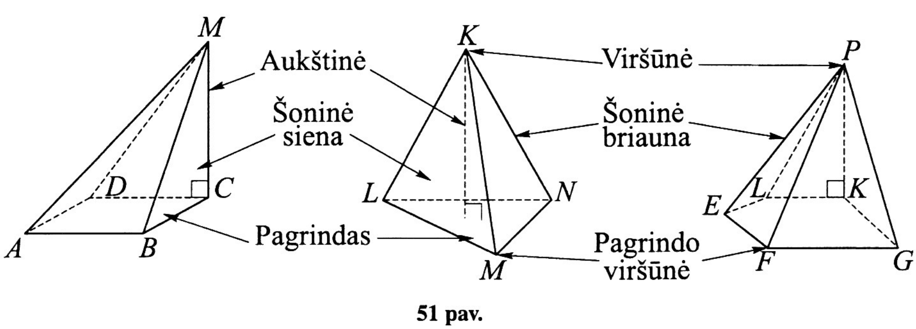
1) Imkime bet kurį iškiląjį daugiakampį (pavyzdžiui, keturkampį $ABCD$);
2) Bet kurį tašką (E), nepriklausantį daugiakampio plokštumai, atkarpomis sujunkime su daugiakampio viršūnėmis. Šios atkarpos ir daugiakampio kraštinės sudaro trikampius, turinčius bendrą viršūnę (E).



50 pav.

Apibrėžimas. Kūną, apribotą trikampių, turinčių bendrą viršūnę, ir daugiakampio, vadiname *piramide*.

Daugiakampis vadinamas piramidės pagrindu, o trikampiai — šoninėmis sienomis. Statmuo, nuleistas iš piramidės viršūnės į pagrindo plokštumą, vadinamas piramidės *aukštine*.

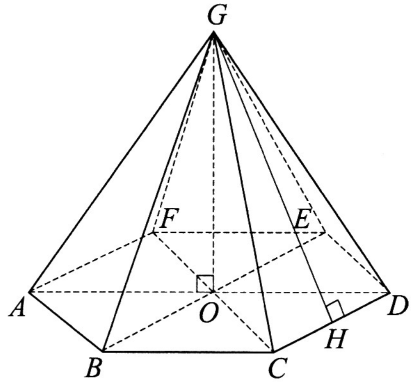


51 pav.

51 paveikslėlyje pavaizduotos piramidės $MABCD$, $KLMN$ ir $PEFGKL$ (pirmoji raidė žymi piramidės viršūnę).

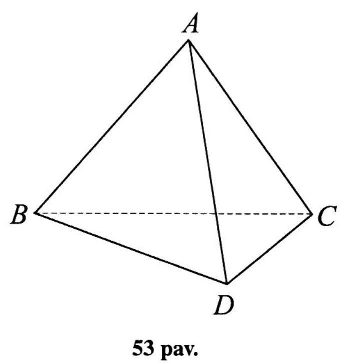
Apibrėžimas. Piramidė, kurios pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis, o aukštinė eina per pagrindo daugiakampio centrą, vadinama *taisyklingąja piramide*. Jos šoninės sienos aukštinė vadinama *apotemà*.

52 paveikslėlyje pavaizduota taisyklingoji šešiakampė piramidė $GABCDEF$. Piramidės pagrindas — taisyklingasis šešiakampis $ABCDEF$, piramidės aukštinė — GO, apotema — GH.



52 pav.

Trikampės piramidės vaizdas (lygiagrečioji projekcija) plokštumoje gali būti bet koks iškilasis keturkampis $ABCD$ (53 pav.), kurio viena įstrižainė matoma, kita — ne.



53 pav.

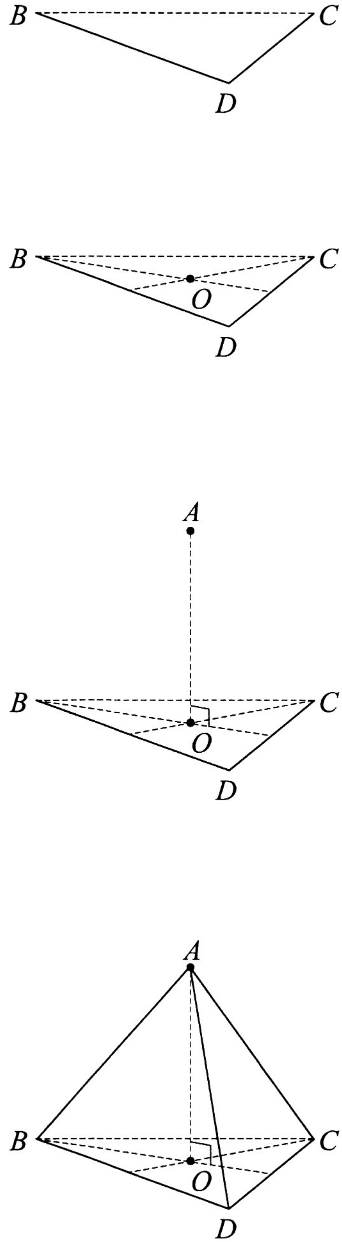
Taisyklingosios trikampės piramidės projekciją patogu braižyti taip:

Brėžiame pagrindo trikampio projekciją — įvairiakraštį bukąjį trikampį BCD.

Piramidės aukštinės pagrindas yra nubrėžto trikampio BCD pusiaukraštinių susikirtimo taškas (paaiškinkite, kodėl). Brėžiame dvi ΔBCD pusiaukraštines (kodėl nereikia visų trijų?). Jų susikirtimo taškas O.

Iš taško O vertikaliai aukštyn brėžiame piramidės aukštinę OA. Taškas A yra piramidės viršūnė.

Tašką A atkarpomis sujungiame su trikampio BCD viršūnėmis.



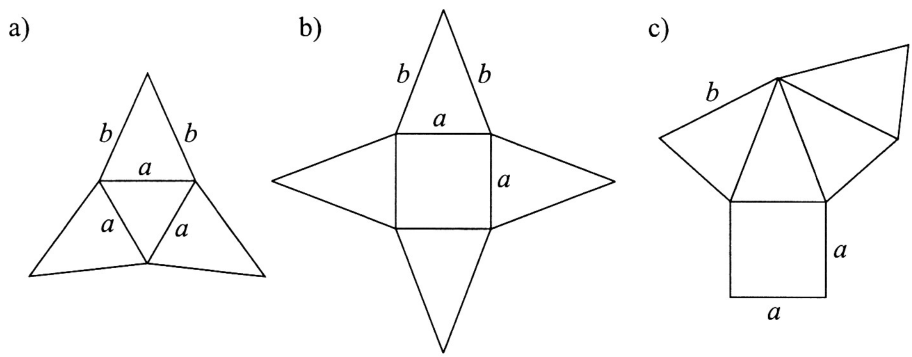
54 pav.

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

68. Ar piramidės aukštinė statmena pagrindo kraštinėms? Paaiškinkite.

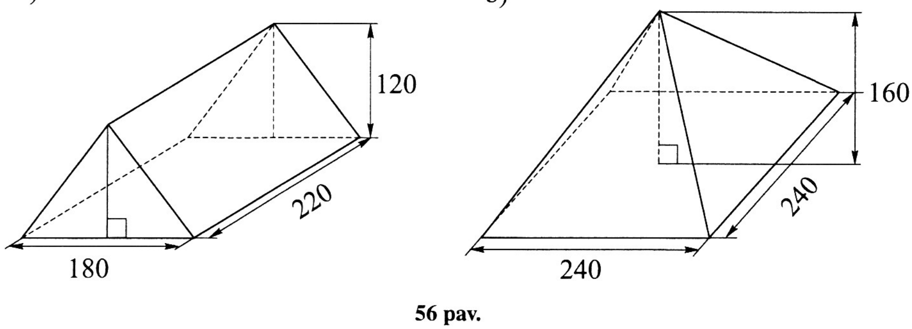
69. Pateikite piramidės formos daiktų pavyzdžių.

70. Pasidarykite taisyklingosios trikampės (55 a pav.) ir keturkampės (55 b, c pav.) piramidės modelius pagal mokytojo nurodytus matmenis. Apskaičiuokite, kiek popieriaus sunaudota piramidžių gamybai. Kiek procentų sudarė atraižos?



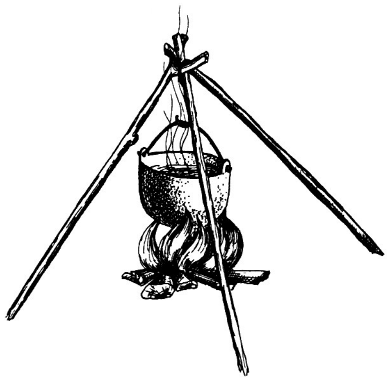
55 pav.

71. Kuriai palapinei su dugnu (56 pav.) pasiūti reikia daugiau, ir kiek daugiau, medžiagos, jei siūlėms pridedama 3% paviršiaus ploto (atsakymą pateikite 0,01 m^2 tikslumu)? Kokios formos kiekvienos palapinės stogo šlaitai? (Matmenys duoti centimetrais.)



56 pav.

72. Kokio ilgio karčių reikia pasiruošti (57 pav.), jei norime, kad katilo dugnas būtų 15 cm nuo žemės paviršiaus, ir 60 cm nuo trikojo viršaus? Kartys 7 cm įsmeigtos į žemę taškuose, kurie yra taisyklingojo trikampio viršūnės ir su žemės paviršiumi sudaro lygius 60° kampus.



57 pav.

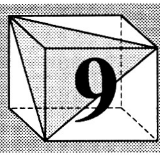
73. Nuo stačiakampės aikštelės kampuose esančių 4,5 m aukščio sutlpų ištiesti vienodo ilgio lynai ir pakabintas šviestuvas, nutolęs per 3 m nuo aikštelės paviršiaus. Apskaičiuokite lynų ilgių sumą, jei aikštelės ilgis lygus 8 m, o plotis — 6 m.

74. Piramidės aukštinė OM eina per įbrėžto į pagrindą apskritimo centrą O. Ką galite pasakyti apie tokios piramidės šoninių sienų aukštines ir sienų pasvirimo į pagrindą kampus? (Prisiminkite, kur yra įbrėžto apskritimo centras.)

75. Piramidės pagrindas yra lygiašonė trapecija, kurios pagrindai — 2 m ir 8 m. Apskaičiuokite piramidės:

a) šoninio paviršiaus plotą;

b) sienų pasvirimo į pagrindo plokštumą kampų sinusus, jei piramidės aukštinė eina per įbrėžto į trapeciją apskritimo centrą ir lygi 150 cm. Kokia savybe pasižymi keturkampis, jei į jį galima įbrėžti apskritimą?



PRIZMĖS IR PIRAMIDĖS TŪRIAI

Jau mokate apskaičiuoti kubo, stačiakampio gretasienio tūrį. Prisiminkite, kaip vieno litro stiklainiu (ar stikline) pilant vandenį galima išmatuoti nežinomo indo tūrį.

PAVYZDYS. Pilant stiklinėmis, į indą tilpo lygiai 15 stiklinių vandens, t. y. indo tūris $V = 15$ stiklinių. Žinome, kad stiklinėje telpa 200 cm^3 vandens. Inde tilpusio vandens, taip pat ir indo tūrį išreikškime kubiniais centimetrais, t. y. $V = 15 \cdot 200 = 3000$ (cm^3). Pilant vandenį $1\,\ell$ talpos stiklainiu tame pačiame inde tilps 3 stiklainiai, t. y. $V = 3\,\ell$.

Indo tūrį išreiškėme įvairiais skaičiais $(15, 3000, 3)$. Šie skaičiai priklauso nuo matavimo vienetų.

Tūrio matavimo vienetais laikomi tūriai kubų, kurių kraštinės lygios ilgio vienetui, pvz. 1 mm^3, 1 cm^3, 1 m^3 ir t. t. Mūsų žinias apie kūnų tūrius glaustai išreiškia tokios kūnų *tūrių savybės*:

1) Kiekvienam kūnui priskiriamas teigiamas skaičius, vadinamas jo tūriu.
2) Lygių kūnų tūriai yra lygūs.
3) Kūno, sudaryto iš kelių kūnų, tūris lygus tų kūnų tūrių sumai.

Prizmės ir piramidės tūrių skaičiavimo formules pateiksime be įrodymo*.

Prizmės tūris $V = S \cdot H$
Piramidės tūris $V = \frac{1}{3} S \cdot H$

S — pagrindo plotas,
H — aukštinė.

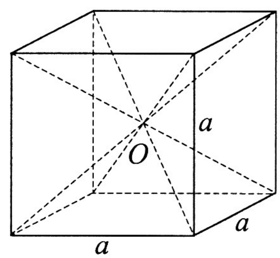
Stačiakampio gretasienio tūrio formulę $V = abc$, kur a, b ir c — stačiakampio gretasienio matmenys, galima užrašyti tokiu pat pavidalu, kaip ir kitų prizmių tūrio formulę: jei $a \cdot b$ pažymėsime S, o c pažymėsime H, tai $V = S \cdot H$.

---

* Plačiau pasiskaityti apie kūnų tūrius ir jų skaičiavimo formulių įrodymus galima X—XII klasių geometrijos vadovėliuose.

Taisyklingosios keturkampės piramidės tūrio formulė yra $V = \frac{1}{3}S \cdot H$. Įsitikinkime, kad ši formulė teisinga.

Nagrinėkime kubą, kurio briauna lygi a (58 pav.). Jo tūris $V = a^3$.



58 pav.

Išveskime visas kubo įstrižaines. Jos susikerta viename taške O, kuris dalija įstrižaines pusiau. Jei šias įstrižainių puses įsivaizduosime kaip taisyklingosios keturkampės piramidės briaunas, o kubo sienas — kaip šių piramidžių pagrindus (ar galėtumėte įrodyti, kad tai — taisyklingosios piramidės?), tai tokių piramidžių bus šešios, o jų aukštinė $H = \frac{a}{2}$. Vienos piramidės tūris lygus šeštadaliui kubo tūrio:

$$V = \frac{1}{6}a^3.$$

Tą patį rezultatą gauname pagal formulę

$$V = \frac{1}{3}S \cdot H.$$

Kadangi $S = a^2$, o $H = \frac{a}{2}$, tai

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{6}a^3.$$

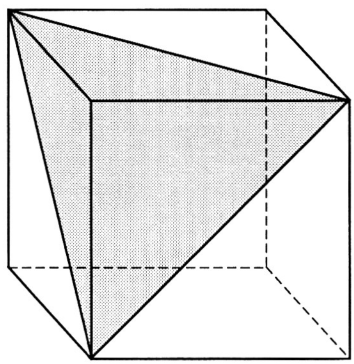
KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

76. Apskaičiuokite 56 paveikslėlyje pavaizduotų palapinių tūrį 0,01 m^3 tikslumu (matmenys duoti centimetrais).

77. Faraono Chefreno piramidės (statyta 2650 m. pr. Kr.) aukštis yra 136,4 m, o pagrindo kvadrato kraštinė — 210,4 m. Kokia šios piramidės masė, jei koridoriai ir laidojimo kambarys užima 2725 m^3 (statybinės medžiagos tankis lygus $2{,}8\ g/cm^3$)?

78. Griovio ilgis lygus 84 m, gylis — 0,6 m, dugno plotis — 0,3 m, o viršuje plotis 1,4 m. Kiek reikės mokėti už tokio griovio iškasimą, jei iškasti 1 m^3 žemės kainuoja a Lt (sužinokite, kiek tai galėtų būti)?

79. Nuo kubo per sienų įstrižaines nupjautas kampas (59 pav.). Apskaičiuokite likusio kūno paviršiaus plotą ir tūrį, jei kubo briauna lygi a.



59 pav.

80. Nubraižykite taisyklingosios piramidės $DABC$ eskizą. Pavaizduokite brėžinyje ir užrašykite:

a) briaunų pasvirimo į pagrindą kampus;

b) sienos CDB ir pagrindo ABC kampą;

c) briaunos AD ir pagrindo kraštinių AC ir AB kampus;

d) kampą tarp piramidės aukštinės ir šoninės briaunos.

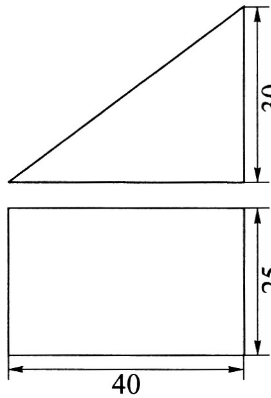
81. Norime sukonstruoti dėžutę be dangtelio, kurios aukštis lygus 9 cm, o pagrindas yra trikampis, kurio kraštinės — 6 cm.

a) Nubraižykite dėžutės išklotinę (be užlaidų siūlėms) masteliu 1 : 3.

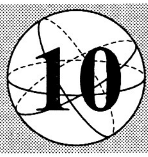
b) Apskaičiuokite, kiek medžiagos reikės dėžutei.

c) Koks bus dėžutės tūris?

82. Brėžinyje (60 pav.) duotos briaunainio frontalinė ir horizontalinė projekcijos. Apskaičiuokite briaunainio paviršiaus plotą ir tūrį (matmenys nurodyti centimetrais).

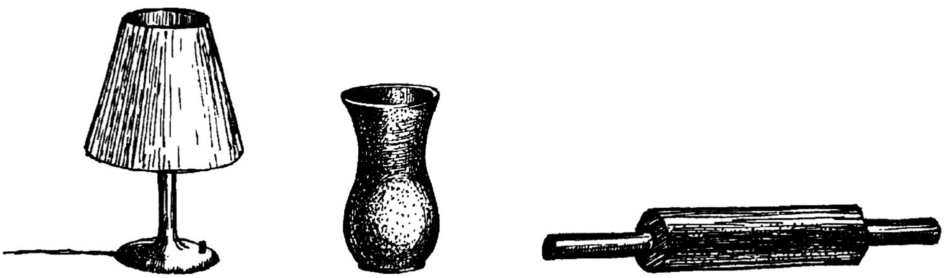


60 pav.



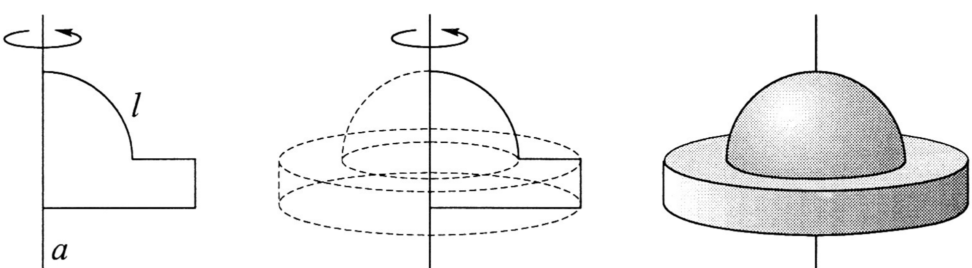
10 SUKIMOSI KŪNAI

Gyvenime dažnai matome kūnus, apribotus sukimosi paviršiaus. Pavyzdžiui, tekinimo staklėmis pagamintos detalės, vazos, indai ir pan.



61 pav.

Jei plokštumos dalį, apribotą kreive l ir tiese a (62 pav.), apsuksime erdvėje apie tiesę a, tai gausime kūną, vadinamą *sukimosi kūnu*. Tiesė a (apie kurią sukame) vadinama *sukimosi ašimi*.

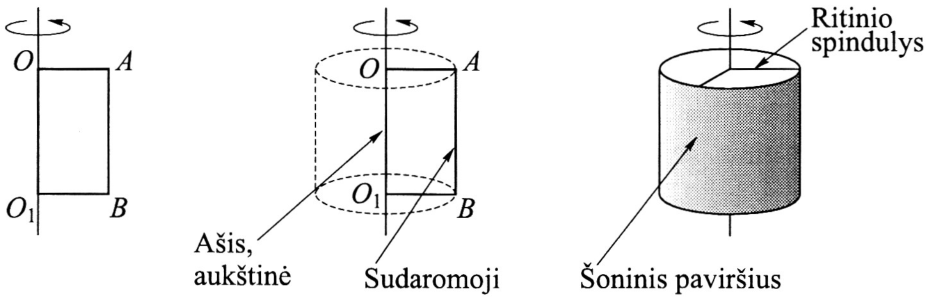


62 pav.

Panagrinėkime paprasčiausius kūnus, gaunamus sukant apie ašį stačiakampį, statųjį trikampį ir pusskritulį.

10.1. Ritinys

Kūnas, gaunamas stačiakampį sukant erdvėje apie vieną iš jo kraštinių, vadinamas *ritiniu* (63 pav.).

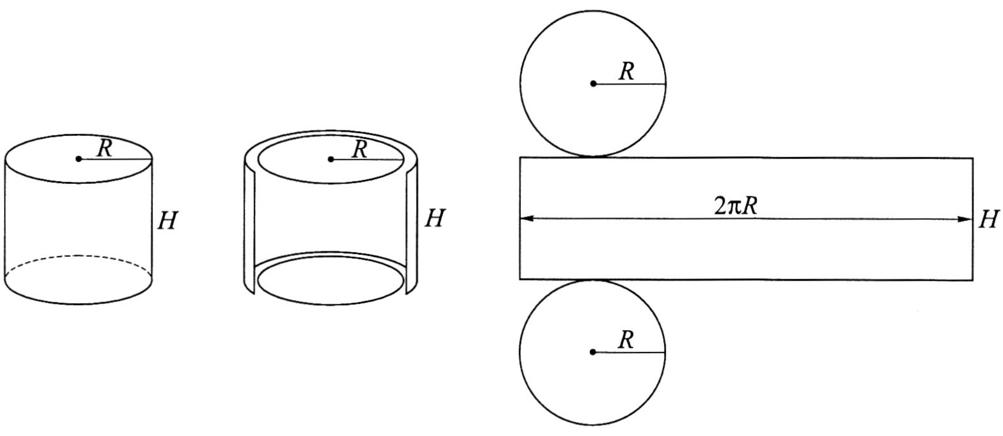


63 pav.

Kraštinė, apie kurią sukame, vadinama *ritinio ašimi* (OO_1), o kraštinė, kuri sukama — *sudaromąja* (AB). Skrituliai, kuriuos brėžia stačiakampio kraštinės (OA ir O_1B), statmenos sukimosi ašiai, vadinami *ritinio pagrindais*. Paviršius, kurį nubrėžia kraštinė AB, vadinamas ritinio *šoniniu paviršiumi*. Ritinio aukštinė — tai statmuo pagrindams. Ji lygi ritinio sudaromajai.

Ritinio pagrindai yra lygiagretūs (paaiškinkite, remdamiesi plokštumų lygiagretumo požymiu).

Nesunku suvokti, kaip atrodo ritinio viso paviršiaus išklotinė (64 pav.). Visą ritinio paviršių sudaro šoninis paviršius ir pagrindų skrituliai.



64 pav.

Iš brėžinio matome, kad žinodami pagrindo spindulį (R) ir ritinio aukštinę (H) ritinio viso paviršiaus plotą galime apskaičiuoti pagal formulę:

$$S_{\text{v}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

arba

$$S_{\text{v}} = 2\pi R(H + R)$$

Ritinio tūris apskaičiuojamas pagal formulę:

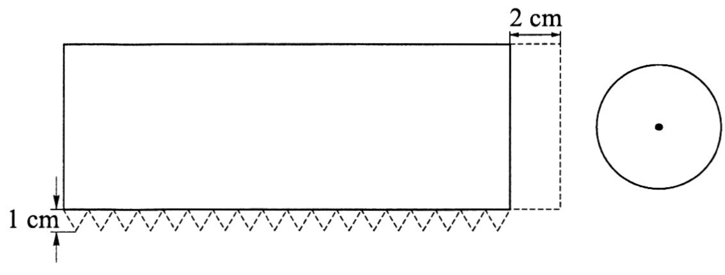
$$V = \pi R^2 H$$

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

83. Apskaičiuokite ritinio šoninio paviršiaus plotą, viso paviršiaus plotą ir tūrį, jei ritinio aukštinė ir pagrindo skersmuo lygūs 8 dm.

84. Vienas ritinio formos uogienės indelis dvigubai platesnis už antrąjį, bet yra perpus už jį žemesnis. Į kurį indelį telpa daugiau uogienės?

85. Kiek liks atraižų, jei lapas, iš kurio daromas atviras 8 dm aukščio ir 6 dm skersmens ritinio formos indas, yra stačiakampis, o jo matmenys 10 dm × 26 dm? Siūlėms šone paliekame 2 cm, dugnui — 1 cm. (Atsakymą pateikite 1 cm^2 tikslumu.)



65 pav.

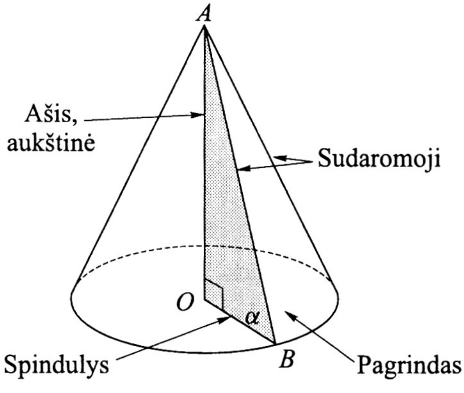
86. Kiek lentų, kurių storis yra 2 cm, plotis — 15 cm, galima išpjauti iš rąsto, jei jo skersmuo lygus 30 cm, o ilgis — 5 m? Kiek procentų rąsto tūrio sudarys nuopjovos, jei pjūklo tako plotis 0,2 cm?

87. Rūsio skliautas yra pusritinio formos. Rūsio ilgis lygus 6 m, plotis — 4 m. Sienos aukštis iki skliauto pradžios yra 1 m. Kiek kubinių metrų tinko reikės šiam rūsiui ištinkuoti 1 cm storio sluoksniu, jei rūsio gale esančios durys yra 0,9 m pločio ir 2 m aukščio?

10.2. Kūgis

Kūnas, gautas statųjį trikampį apsukus apie vieną jo statinį, vadinamas *kūgiu.*

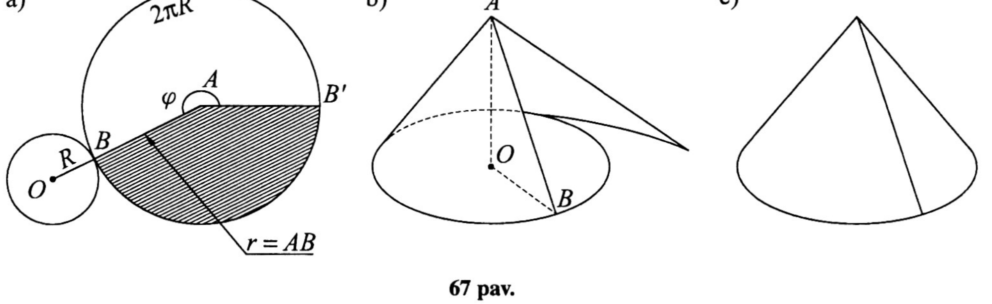
Statinis (AO), apie kurį sukame, vadinamas kūgio *aukštine*, arba *ašimi*. Trikampio įžambinė (AB) brėžia kūgio *šoninį* (kūginį) *paviršių*, statinis (BO) — kūgio pagrindą. Viršūnę su pagrindo apskritimo taškais jungiančios atkarpos vadinamos kūgio *sudaromosiomis*. $\angle ABO$ — sudaromosios pasvirimo į pagrindą kampas (66 pav.).



66 pav.

Kūgio pagrindas yra skritulys, kurio spindulys $R = BO$, o šoninis paviršius, kurį brėžia įžambinė AB, yra skritulio išpjova. Šio skritulio spindulys $r = AB$, išpjovos lanko ilgis yra $2\pi R$ ($2\pi BO$). Kūgio išklotinės kampą prie viršūnės pažymėkime φ (žr. 67 a pav.).

Kūgio viso paviršiaus plotą sudaro pagrindo skritulio ir šoninio paviršiaus plotų suma.



67 pav.

Kūgio šoninio paviršiaus plotą galima apskaičiuoti taip:

1. Visas skritulys, tai „išpjova“, kurios centrinis kampas — 360°.

Kampas	Plotas	Lanko ilgis
360°	πr^2	$2\pi r$
1°	$\dfrac{\pi r^2}{360}$	$\dfrac{2\pi r}{360}$
φ	$\dfrac{\pi r^2}{360} \cdot \varphi$ (1)	$\dfrac{2\pi r}{360} \cdot \varphi$ (2)

2. Kūgio šoninio paviršiaus išklotinės centrinis kampas yra φ laipsnių, jį atitinkančio lanko ilgis $2\pi R$. Iš (2) lygybės apskaičiuojame φ:

$$\frac{2\pi r}{360}\varphi = 2\pi R, \qquad \varphi = \frac{2\pi R \cdot 360}{2\pi r}, \qquad \varphi = \frac{R}{r} \cdot 360. \tag{3}$$

3. Įstatę gautą φ reikšmę į (1) formulę, atitinkamai gauname:

$$\frac{\pi r^2}{360} \cdot \frac{R}{r} \cdot 360 = \pi r R.$$

Įprasta sudaromąją AB žymėti ne r, bet l. Taip pažymėję, gausime *kūgio šoninio paviršiaus ploto formulę*:

$$\boxed{S_{\check{s}} = \pi R l}$$

R — pagrindo spindulys, l — sudaromoji.

Kūgio tūris apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\boxed{V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H}$$

H — aukštinė.

Patys užrašykite kūgio viso paviršiaus ploto formulę.

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

88. Kūgio aukštinė lygi 4 cm, pagrindo spindulys — 3 cm. Apskaičiuokite:
a) sudaromosios ilgį;
b) viso kūgio paviršiaus plotą;
c) tūrį.

89. Vienas kūgis gautas apsukus statųjį trikampį, kurio statiniai $a = 2{,}4\,\text{cm}$, $b = 3{,}2\,\text{cm}$, apie statinį a, o kitas — apie statinį b. Kurio kūgio didesnis:
a) šoninis paviršius;
b) tūris?

90. Padarykite kūgio, kurio aukštis yra 6 cm, o pagrindo skersmuo — 4 cm, viso paviršiaus išklotinę. Apskaičiuokite:
a) išklotinės kampą prie viršūnės;
b) sudaromosios pasvirimo į pagrindą kampo tangentą.

91. Smėlis, molis, grūdai ir anglys supilta į kūgius, kurių natūralaus nuolydžio kampai atitinkamai lygūs 25°, 30°, 27° ir 42°. Užrašykite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti smėlio, molio, grūdų ir anglių kūgių mases. Apskaičiuokite jas, kai kūgio pagrindo apskritimo ilgis 12π metrų ir žinoma, kad smėlio tankis yra $1{,}2\,\text{t/m}^3$, molio — $2\,\text{t/m}^3$, grūdų — $0{,}75\,\text{t/m}^3$, anglių — $0{,}8\,\text{t/m}^3$.

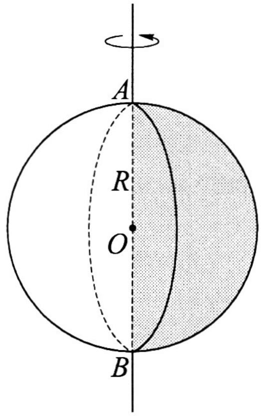
92. Kūgio sudaromoji lygi l ir yra pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α.
a) Apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą ir tūrį.
b) Kaip ir kiek pasikeis paviršiaus plotas ir tūris, jei sudaromąją sumažinsime du kartus?

10.3. Rutulys

Kūnas, gautas pusskritulį apsukus apie jo skersmenį, vadinamas *rutuliu*.

Rutulio paviršius vadinamas *sfera*. Jį brėžia pusskritulį ribojantis pusapskritimis (prisiminkite, kuo skiriasi skritulys ir apskritimas). Sferą galime apibrėžti ir kitaip: „Paviršius, sudarytas iš visų erdvės taškų, vienodai nutolusių nuo vieno taško, vadinamas *sfera*“. Sferos negalime iškloti plokštumoje.*

* Pasidomėkite, kaip braižomi žemėlapiai, t. y. kaip Žemės paviršius vaizduojamas plokštumoje (paskaitykite, pavyzdžiui, knygoje: H. Šteinhauzas. Matematinis kaleidoskopas. V.: Mokslas, 1976).



68 pav.

O — centras,
OA — spindulys ($OA = R$),
AB — skersmuo.

Sferos (rutulio paviršiaus) plotas apskaičiuojamas pagal formules:

$$S = 4\pi R^2, \quad S = \pi d^2$$

Rutulio tūris — pagal formulę:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

R — rutulio spindulys, d — skersmuo.

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

93. Sferos spindulys lygus a cm. Apskaičiuokite jos paviršiaus plotą. Palyginkite jį su kubo paviršiaus plotu, jei kubo kraštinė lygi sferos skersmeniui. Ar tilptų ši sfera į kubą?

94. Sferos spindulį sumažinome tris kartus. Kaip pakito sferos plotas?

95. Rutulio spindulį padidinome du kartus. Kaip pakito jo tūris?

96. Žemės pusiaujo ilgis apytiksliai lygus 40 000 km. Mėnulio skersmuo — 3500 km. Kiek kartų Žemės rutulio tūris didesnis už Mėnulio rutulio tūrį?

97. Apskaičiuokite 0,01 tikslumu sferos spindulį, jei jos plotas lygus 50 cm^2 (naudokitės skaičiuokliu).

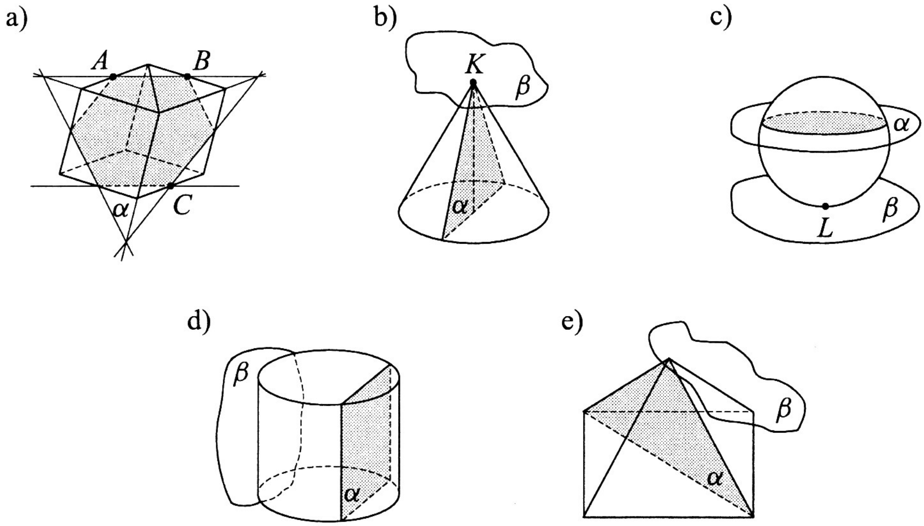
98. Žemę laikykime rutuliu, kurio skersmuo apytiksliai lygus 12 700 km. Kiek ploto užima sausuma, jei ji sudaro 30% Žemės paviršiaus?

99. Futbolo kamuolio skersmuo yra 22 cm. Kiek odos reikia jam pasiūti, jei siūlėms pridedama 8% paviršiaus ploto?

100. Kiek galima pagaminti švininių svarelių iš 10 kg metalo, jei svarelius darysime:
a) kūgio, kurio aukštis yra 8 mm, pagrindo skersmuo — 6 mm, formos;
b) rutulio, kurio skersmuo yra 12 mm, formos?
(Švino tankis — 11,3 g/cm^3.)

11 KŪNŲ KIRTIMAS PLOKŠTUMA

Išnagrinėjome tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtį erdvėje. Dabar panagrinėsime žinomų kūnų (prizmių, piramidžių, ritinių, kūgių, rutulių) ir plokštumos tarpusavio padėtis (69 pav.).



69 pav.

Plokštuma gali:
— neturėti su kūnu bendrų taškų (t. y. nekirsti jo, 69 d pav., plokštuma β),
— turėti tik vieną bendrą tašką (69 b ir c pav., plokštuma β),
— turėti bendrą atkarpą (69 e pav., plokštuma β),
— būti visa briaunainio siena, kūgio ar ritinio pagrindas.

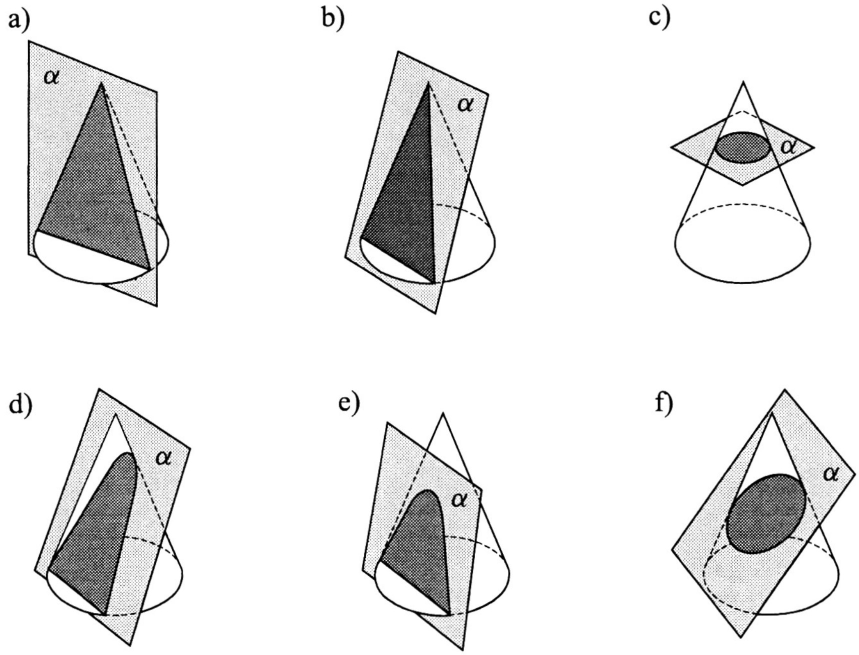
Įdomiausias mums yra atvejis, kai plokštuma kerta kūną (69 pav., plokštuma α).

Sakome, kad plokštuma *kerta* kūną, jei jos abiejose pusėse yra to kūno taškų. *Figūra*, kuri susidaro kūno paviršiui susikirtus su plokštuma, vadinama *pjūviu*. *Kūno pjūviu* vadinama ir kertančiosios plokštumos dalis, apribota susidariusios figūros (69 pav. kūnų pjūviai užbrūkšniuoti).

Briaunainio pjūvis yra *daugiakampis* (69 a, e pav.).

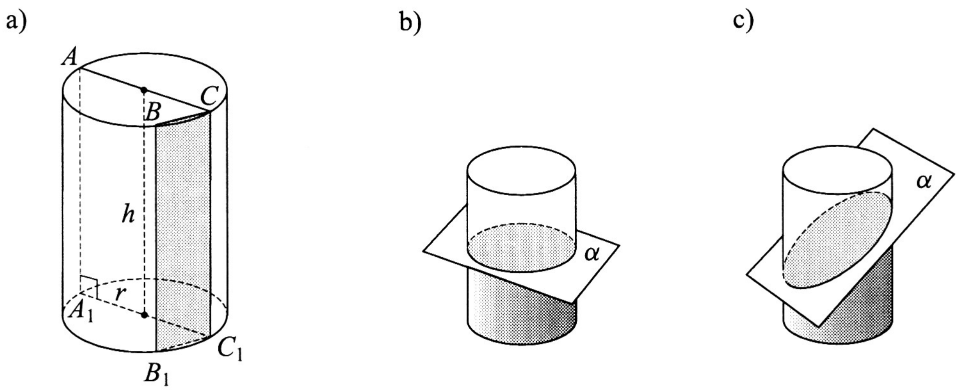
Kūgio pjūvis yra *trikampis*, jei kertančioji plokštuma eina per kūgio sudaromąsias (70 b pav.). Jei plokštuma eina ir per kūgio ašį, gautasis pjūvis vadinamas ašiniu pjūviu (70 a pav.). Nustatykite, koks šiuo atveju yra pjūvio trikampis.

Jei kertančioji plokštuma kerta kūgio paviršių ir yra lygiagreti su pagrindu, tai pjūvis — *apskritimas* (70 c pav.). Kai kertančioji plokštuma lygiagreti su kūgio sudaromąja, kūgio paviršiaus ir šios plokštumos susikirtimo linija yra *parabolė* (70 d pav.), o jei plokštuma lygiagreti su kūgio ašimi — *hiperbolė* (70 e pav.). Jei kertančioji plokštuma nėra lygiagreti nei su sudaromąja, nei su ašimi, nei su pagrindu, tai ji kertasi su kūgio paviršiumi kreive, vadinama *elipse* (70 f pav.).



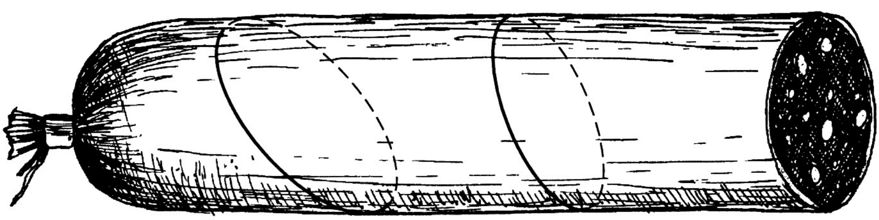
70 pav.

Ritinio ir pagrindams statmenos plokštumos sankirta yra stačiakampis (71 a pav., BB_1C_1C). Jei ritinį kertame plokštuma, einančia per ritinio ašį, gauname ašinį pjūvį (71 a pav., AA_1C_1C). Ritinio ir plokštumos, lygiagrečios su pagrindais, sankirta yra skritulys, kurio spindulys lygus ritinio spinduliui (įrodykite, remdamiesi tiesės statmenumo dviem lygiagrečioms plokštumoms teorema) (71 b pav.).



71 pav.

Ritinio paviršiaus ir plokštumos, sudarančios su pagrindu kampą $0° < \varphi < 90°$, sankirta yra elipsė (71 c pav.) arba jos dalis, jei plokštuma kerta ir ritinio pagrindą. (Prisiminkite, kokie skirtingi būna dešros griežinėliai įvairiai ją pjaunant (72 pav.).)



72 pav.

Teorema. *Sferos ir plokštumos sankirta yra apskritimas.*

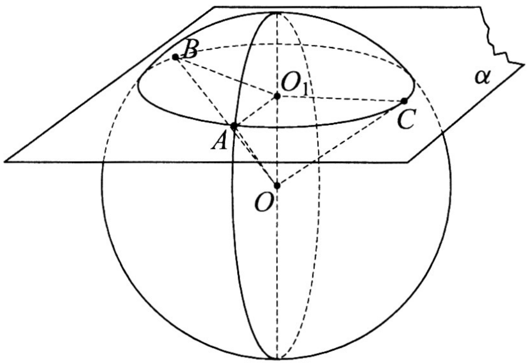
Įrodymas. Tegul sferą, kurios centras O, kerta plokštuma α, neinanti per jos centrą. Iš O nuleiskime statmenį OO_1 į plokštumą α ir panagrinėkime sferos ir plokštumos bendrus taškus ($A, B, C, \ldots$) (73 pav.).

ΔAOO_1, ΔBOO_1, ΔCOO_1 ir t. t. yra statūs ir lygūs, nes:

1) $OO_1 \perp AO_1$, $OO_1 \perp BO_1, \ldots$ (paaiškinkite, remdamiesi tiesės ir plokštumos statmenumo apibrėžimu);
2) $OA = OB = OC = \cdots = R$ (sferos spindulys);
3) OO_1 — bendras visų trikampių statinis.

Vadinasi, $O_1A = O_1B = O_1C = r$. Taškai A, B, C yra plokštumoje α ir vienodai nutolę nuo taško O_1, t. y. jie apskritimo, kurio centras O_1 ir spindulys r, taškai.

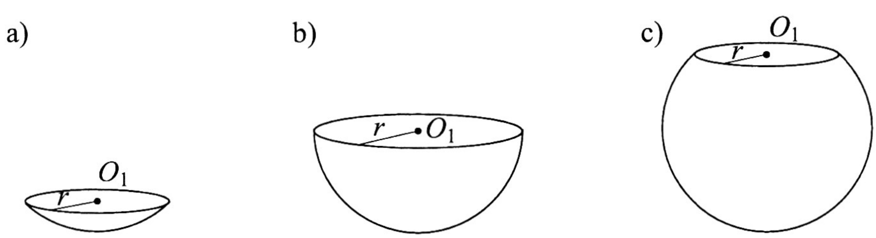
Spindulį r galime apskaičiuoti iš stačiojo trikampio (pvz., trikampio OAO_1): $r = \sqrt{R^2 - OO_1}$. Kai kertančioji plokštuma eina per sferos centrą, gauname pjūvį, vadinamą didžiuoju apskritimu. Jo spindulys lygus sferos spinduliui R. (Paaiškinkite.)



73 pav.

Išvada. *Rutulio ir plokštumos sankirta yra skritulys.*

Rutulio dalys, gautos perkirtus jį plokštuma, vadinamos *nuopjovomis* (74 pav.).



74 pav.

Apibrėžimas. Jei kertančioji plokštuma eina per rutulio centrą, tai nuopjova yra *pusrutulis* (74 b pav.).

KLAUSIMAI IR UŽDUOTYS

101. Kokia figūra yra ritinio ašinis pjūvis? Įrodykite.

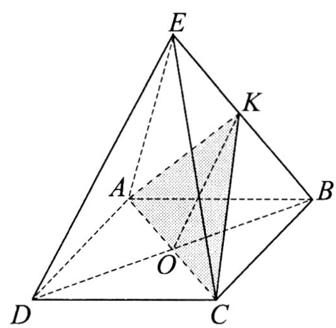
102. a) Nubraižykite pjūvį per taisyklingosios piramidės $EABCD$ pagrindo įstrižainę AC ir briaunos BE vidurio tašką.
b) Kokia figūra yra gautasis pjūvis?
c) Apskaičiuokite pjūvio plotą.
d) Apskaičiuokite pjūvio pasvirimo į pagrindo plokštumą kampą, jei $AB = 2\sqrt{2}\,\text{m}$, $AE = 5\,\text{m}$.

Sprendimas.

a) Pavaizduokime taisyklingąją keturkampę piramidę $EABCD$. Šoninėje briaunoje BE pažymėkime vidurio tašką K.

Nubraižykime piramidės sienų AEB, CEB ir pjūvio plokštumos susikirtimo tieses:

- piramidės sienoje ABE yra du bendri sienos ir pjūvio plokštumos taškai A ir K, todėl siena ABE susikerta su pjūvio plokštuma tiese AK;
- piramidės sienoje BEC yra du bendri sienos ir pjūvio plokštumos taškai C ir K, todėl siena BEC susikerta su pjūvio plokštuma tiese CK;
- piramidės pagrindas ABC kertasi su pjūvio plokštuma tiese AC (duota).



75 pav.

b) Susidaręs pjūvio trikampis AKC — lygiašonis, nes $AK = CK$ kaip lygių trikampių ABE ir CBE atitinkamos pusiaukraštinės. (Galima įrodyti ir remiantis tuo, kad trikampiai AKB ir CKB lygūs. Pamėginkite.)

c) Trikampio AKC aukštinė yra OK (pagrįskite).

Jo plotą rasime pagal formulę:

$$S = \frac{AC \cdot KO}{2}.$$

Iš stataus ir lygiašonio ΔABC:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}, \quad AC = 4\,\text{m}.$$

Iš ΔDBE rasime OK. (OK yra trikampio DBE vidurinė linija. Pagrįskite.)

$$OK = \frac{1}{2}DE, \quad OK = 2{,}5\,\mathrm{m}.$$

Trikampio AKC plotas:

$$S = \frac{4 \cdot 2{,}5}{2} = 5\ (\mathrm{m}^2), \quad S = 5\ \mathrm{m}^2.$$

d) Dvisienio kampo $KACB$ didumas lygus kampo KOB didumui, nes $KO \perp AC$, $BO \perp AC$ kaip kvadrato įstrižainės.

Iš ΔBKO rasime $\angle KOB$ (taikome kosinusų teoremą):

$$BK^2 = OK^2 + OB^2 - 2OK \cdot OB \cos\angle KOB,$$

$$\cos\angle KOB = \frac{OK^2 + OB^2 - BK^2}{2OK \cdot OB},$$

$$\cos\angle KOB = \frac{2{,}5^2 + 2^2 - 2{,}5^2}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5},$$

$$\cos\angle KOB = \frac{4}{12{,}5} = 0{,}32;$$

$$\angle KOB \approx 71^\circ 18'.$$

Pagalvokite, kaip kitaip būtų galima rasti kampą KOB.

103. Kūgis yra sferoje, kurios tūris lygus 16 dm^3. Kūgio ašinis pjūvis yra statusis trikampis, įbrėžtas į sferos didįjį apskritimą. Kiek kartų šio kūgio tūris mažesnis už sferos tūrį? Ar atsakymas priklauso nuo sferos spindulio?

104. Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė lygi 10, o sudaromosios ir spindulio skirtumas yra 5. Apskaičiuokite:

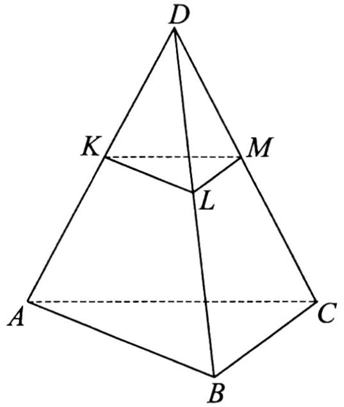
a) ritinio tūrį;

b) ašinio pjūvio plotą.

105. Nubraižykite taisyklingosios keturkampės piramidės $EABCD$ įstrižaininį pjūvį (per viršūnę E ir įstrižainę AC).
a) Kurios piramidės briaunos priklausys pjūviui?
b) Kokia figūra yra pjūvis?
c) Apskaičiuokite pjūvio plotą, jei $AB = a$, $AE = b$.

106. Trikampę piramidę kerta plokštuma, lygiagreti su pagrindu. Kokia figūra yra pjūvis?

Sprendimas. Nubraižykime trikampę piramidę $DABC$. Kirsdami piramidę plokštuma, lygiagrečia su plokštuma ABC, pjūvyje gausime trikampį KLM (76 pav.).



76 pav.

1. Sienos ABD ir dviejų lygiagrečių plokštumų ABC ir KLM susikirtimo tiesės AB ir KL yra lygiagrečios (žr. teoremą 27 p.).
2. Taip pat $AC \parallel KM$ ir $BC \parallel LM$.
3. $\Delta ABD \backsim \Delta KDL$ ($\angle D$ — bendras, $\angle DAB = \angle DKL$ — atitinkamieji kampai), todėl

$$\frac{AD}{KD} = \frac{AB}{KL} = \frac{BD}{LD}. \tag{1}$$

4. $\Delta ACD \backsim \Delta KMD$, todėl

$$\frac{AD}{KD} = \frac{AC}{KM} = \frac{CD}{MD}. \tag{2}$$

5. $\Delta BCD \backsim \Delta LMD$, todėl

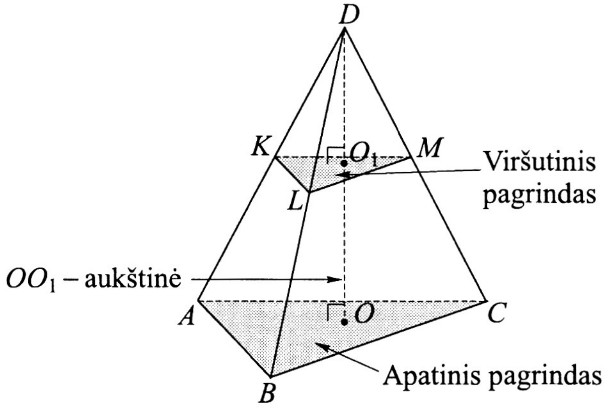
$$\frac{CD}{MD} = \frac{BC}{LM} = \frac{BD}{LD}. \tag{3}$$

Iš (1), (2) ir (3) lygybių pastebime, kad ir

$$\frac{AB}{KL} = \frac{AC}{KM} = \frac{BC}{ML}, \quad \text{t. y.} \quad \Delta ABC \backsim \Delta KLM.$$

Atsakymas. Pjūvyje gauname trikampį, panašų į pagrindą.

107. Piramidę kirsdami plokštuma, lygiagrečia su pagrindu, gauname du briaunainius: *nupjautinę piramidę* $ABCKLM$ ir likutinę piramidę $DKLM$ (viršutinė dalis) (žr. 77 pav.).



77 pav.

a) Kokie keturkampiai yra nupjautinės piramidės šoninės sienos $AKMC$, $CMLB$, $AKLB$? Kodėl?

b) Apskaičiuokite nupjautinės ir likutinės piramidžių aukštines OO_1 ir DO_1.

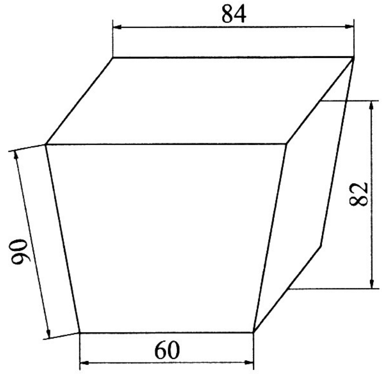
c) Apskaičiuokite šių piramidžių tūrių ir šoninių paviršiaus plotų santykį, jei žinoma, kad piramidė $DABC$ yra taisyklingoji piramidė, kurios aukštinė $DO = 10\,\text{cm}$, pagrindo kraštinės po 5 cm, o pjūvio plokštuma dalija piramidės aukštinę santykiu 2 : 3, skaičiuojant nuo viršūnės.

Nurodymas. Nupjautinės piramidės tūris skaičiuojamas pagal formulę:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}H\left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right)}$$

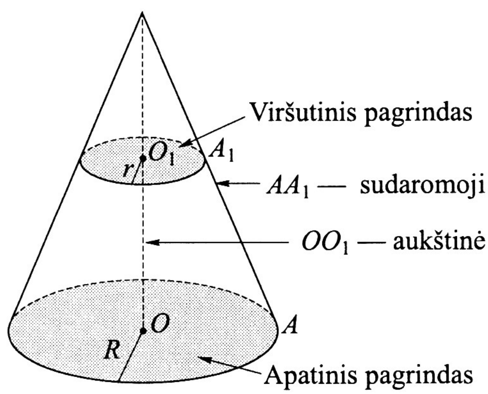
H — aukštinė, S — apatinio pagrindo plotas,
S_1 — viršutinio pagrindo plotas.

108. Konteineris su dangčiu yra taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės formos (žr. 78 pav.). Apskaičiuokite: a) konteinerio tūrį; b) dažų, reikalingų nudažyti konteineriui iš išorės ir vidaus, kiekį, jei 1 m^2 nudažyti reikia 250 g dažų (matmenys duoti centimetrais).



78 pav.

109. Jei kūgį perkirsime plokštuma, lygiagrečia su pagrindu, gausime du kūnus: *nupjautinį kūgį* ir likutinį kūgį (žr. 79 pav.).



79 pav.

Nupjautinio kūgio tūris skaičiuojamas pagal formulę:

$$V = \frac{\pi}{3} H (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

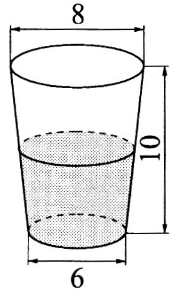
R — apatinio pagrindo spindulys, r — viršutinio pagrindo spindulys.

Nupjautinio kūgio šoninis paviršius skaičiuojamas pagal formulę:

$$S = \pi(R + r)l$$

l — sudaromoji.

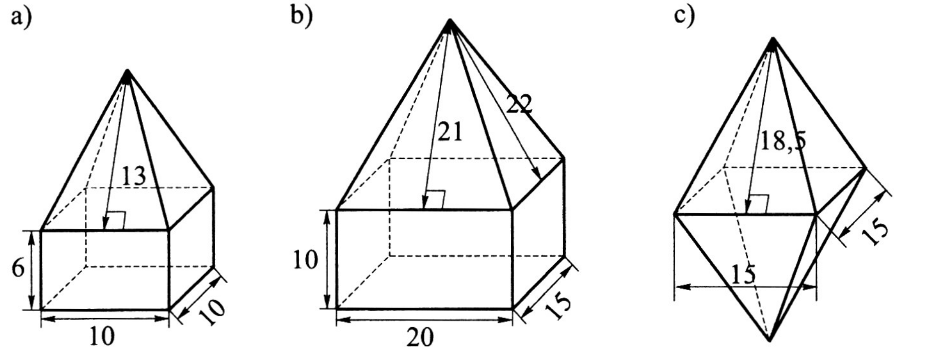
Kiek nupjautinio kūgio formos stiklinėje yra vandens, jei jo aukštis $h = \frac{1}{2}H$ (H — stiklinės aukštis, neskaičiuojant dugno storio)? Kiek cm^3 vandens reikėtų įpilti, kad stiklinė būtų sklidina (žr. 80 pav., matmenys duoti centimetrais).



80 pav.

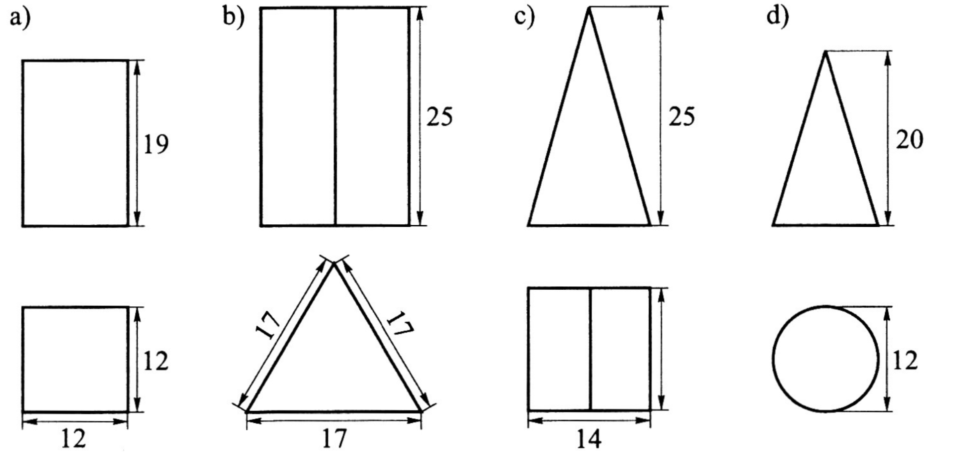
12 UŽDAVINIAI

110. Apskaičiuokite 81 paveikslėlyje pavaizduotų kūnų: a) paviršiaus plotą; b) tūrį. Nubraižykite šių kūnų dvi statmenąsias projekcijas (t. y. vaizdą iš viršaus ir iš priekio).



81 pav.

111. Nupieškite kūnus, kurių dvi projekcijos pavaizduotos 82 paveikslėlyje ir apskaičiuokite jų tūrius.



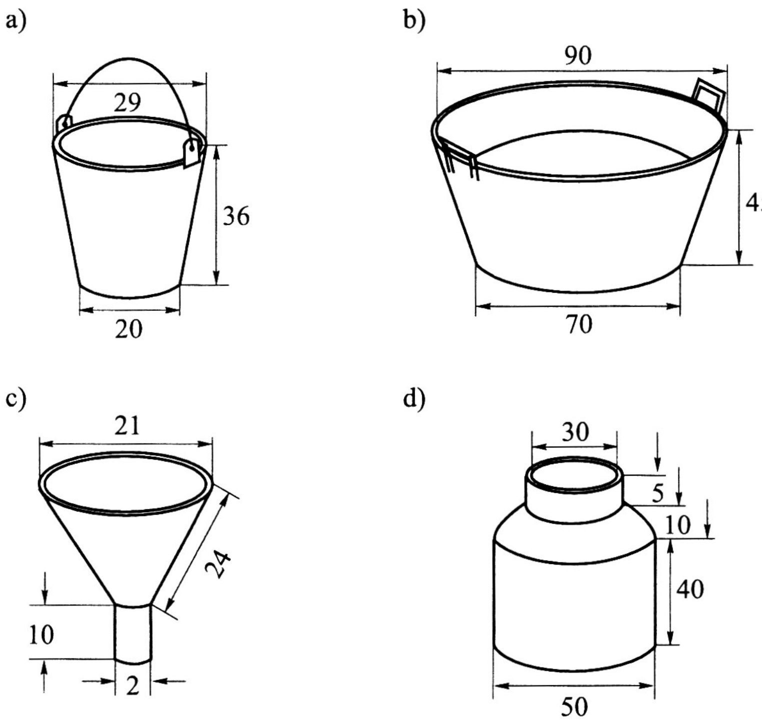
82 pav.

112. Kiek reikia skardos norint pagaminti kibirą (83 a pav.), jei siūlėms ir atliekoms pridedama 12,5% gaminio paviršiaus ploto? (Matmenys duoti centimetrais.)

113. Du trečdaliai vonelės pripildyta cemento. Kokia vonelės su cementu masė, jei tuščios vonelės masė yra 2,5 kg, o cemento tankis — 3,1 kg/dm^3 (83 b pav.)? (Matmenys duoti centimetrais.)

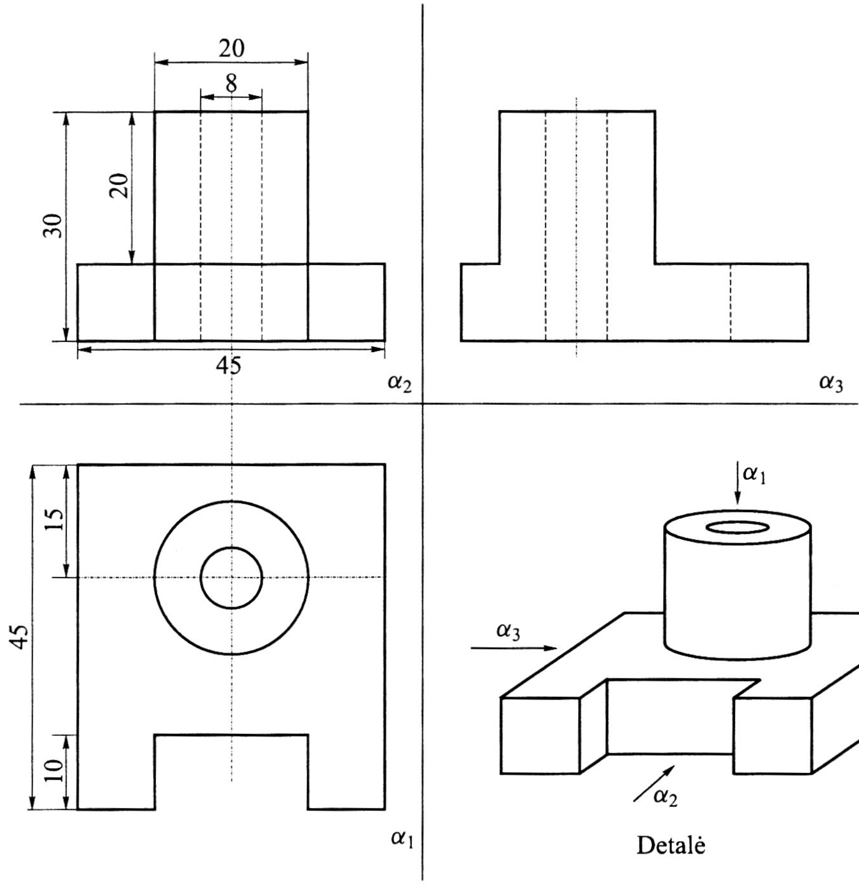
114. Kokia piltuvėlio (83 c pav.) masė, jei jis pagamintas iš plieno skardos, kurios storis yra 2 mm, tankis — 7,8 g/cm^3? (Matmenys duoti centimetrais.)

115. Kiek litrų vandens tilptų bidone (83 d pav.)? (Matmenys duoti centimetrais.)



83 pav.

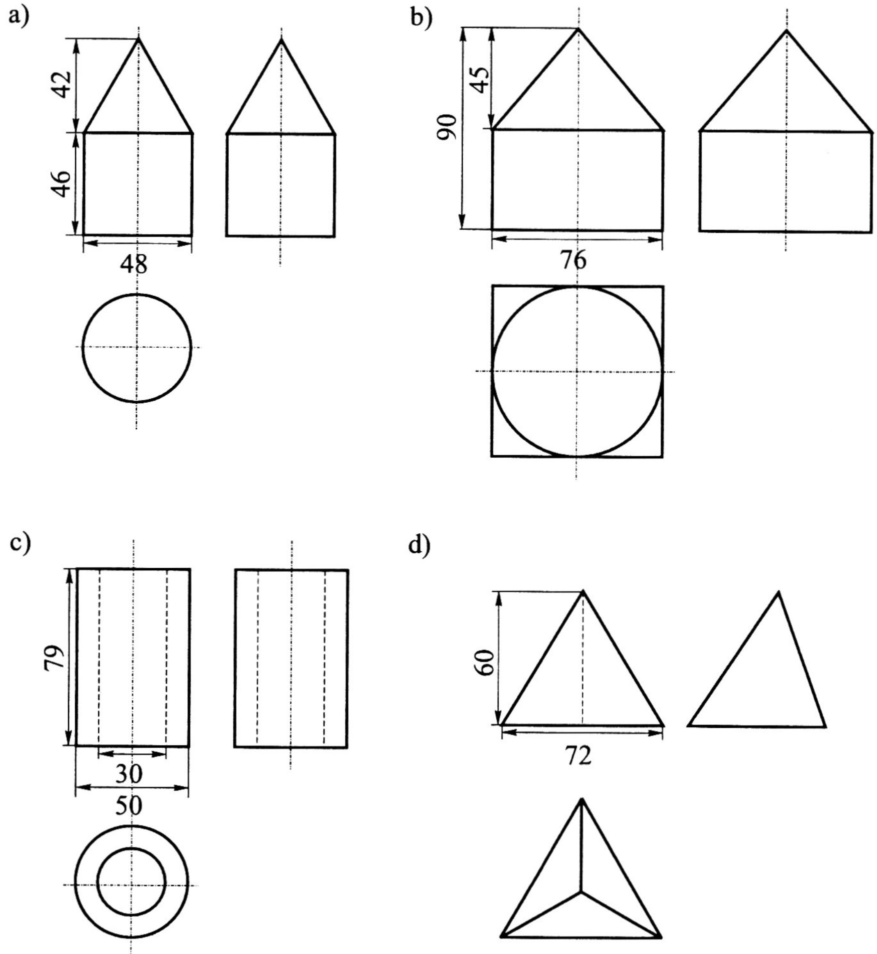
116. 84 paveikslėlyje pavaizduotos detalės statmenosios projekcijos (α_1, α_2, α_3). Apskaičiuokite plieninės detalės masę, jei plieno tankis 7,8 g/cm^3 (matmenys duoti milimetrais).



84 pav.

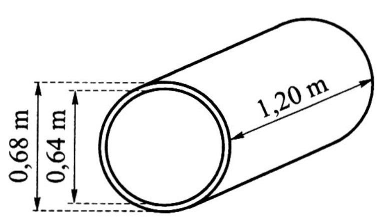
117. Nupieškite detales, kurių projekcijos pavaizduotos 85 paveikslėlyje.

1) Apskaičiuokite kiekvienos medinės detalės masę, jei medžio tankis 0,7 g/cm^3.
2) Kiek reikės lako kiekvienai detalei nulakuoti, jei 250 g galima nulakuoti 1 m^2? (Matmenys duoti milimetrais.)



85 pav.

118. Kokia plieninio vamzdžio masė (86 pav.), jei plieno tankis 7,8 g/cm^3?



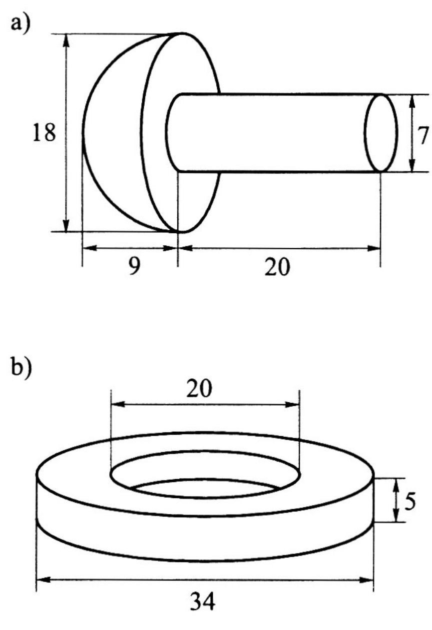
86 pav.

119. Kokia vaikiško bokštelio masė (87 pav.), jei strypelio, ant kurio suverti skridinėliai, skersmuo lygus 1,4 cm, kiekvieno kito skridinėlio skersmuo didesnis 3,4 cm, o aukštis lygus 2 cm? Medžio tankis 0,7 g/cm^3.



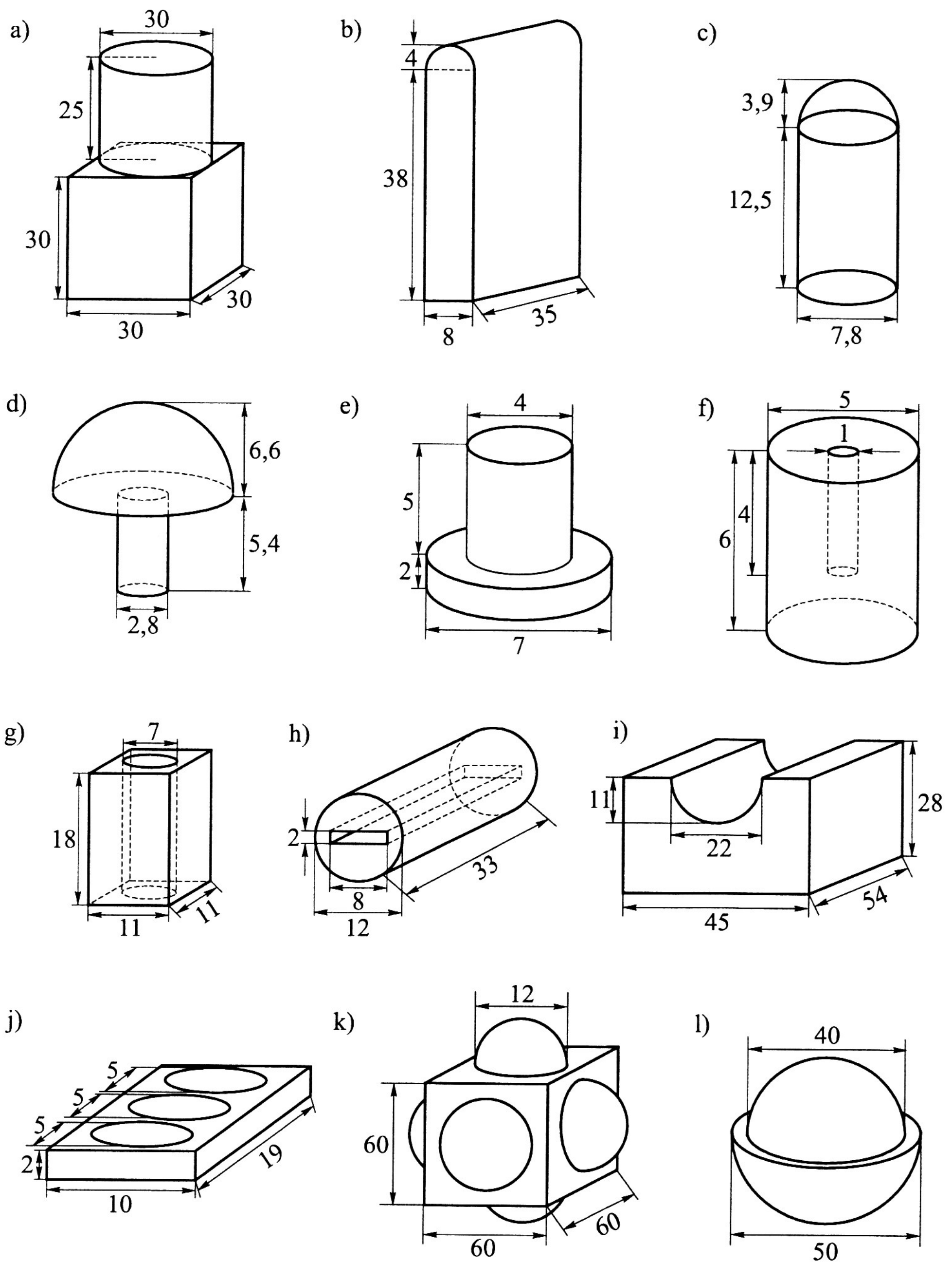
87 pav.

120. Apskaičiuokite 88 paveikslėlyje pavaizduotos a) įvorės ir b) žiedo tūrį bei viso paviršiaus plotą (matmenys duoti milimetrais).

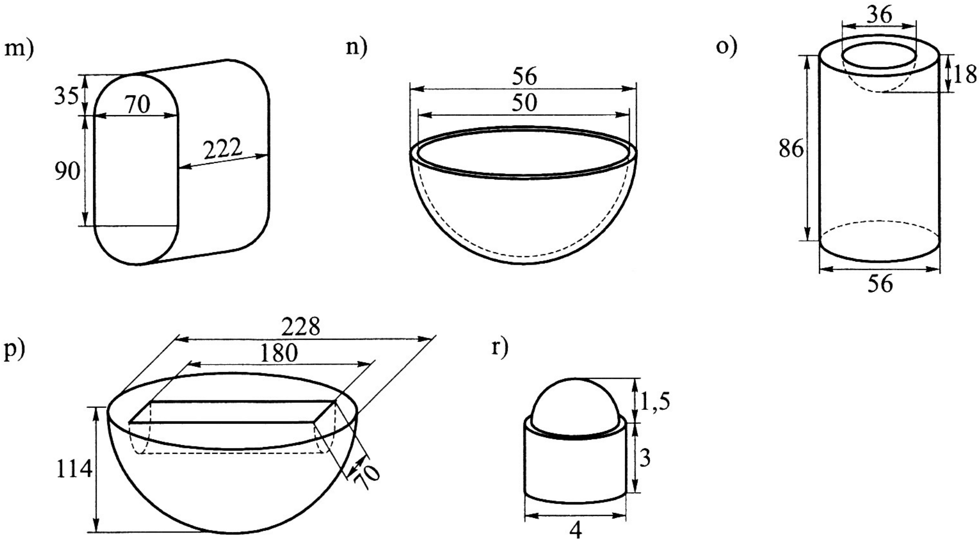


88 pav.

121. Apskaičiuokite 89 paveikslėlyje pavaizduotų kūnų tūrius ir paviršius (matmenys duoti centimetrais). Kokia gipsinių detalių l, n, p masė, jei gipso tankis 1,7 g/cm^3?

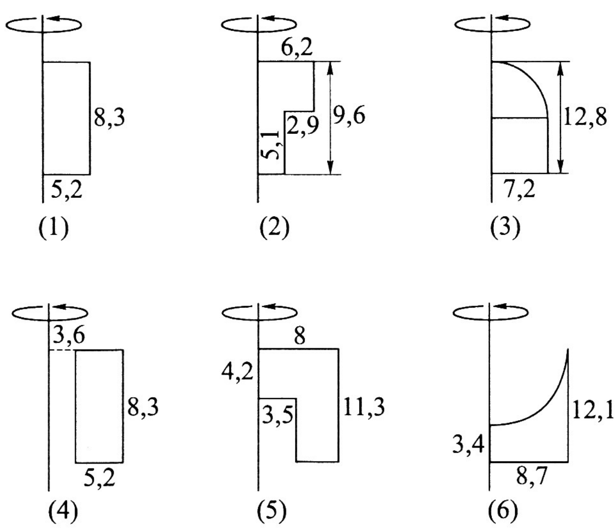


89 pav.

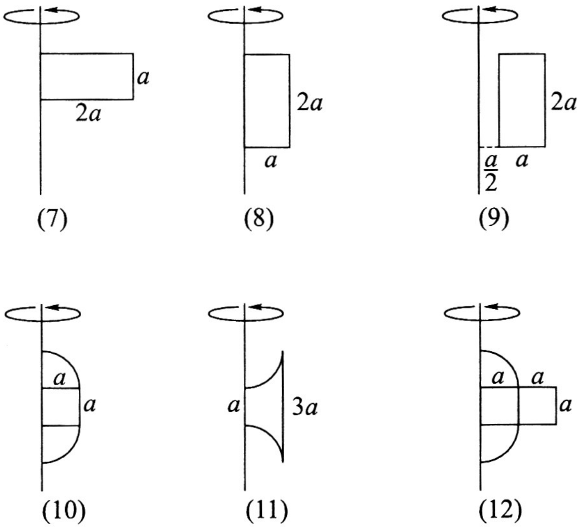


89 pav. (tęsinys)

122. Detalės gautos sukant 90 paveikslėlyje pavaizduotas figūras apie nurodytą ašį.



90 pav.



90 pav. (tęsinys)

a) Pasakykite, iš kokių jums žinomų geometrinių kūnų sudarytos detalės. Apskaičiuokite gautų detalių tūrius ir visą paviršių. (Atsakymus (1)–(6) suapvalinkite iki dešimtųjų ir užrašykite skaičius standartiniu pavidalu.)

b) Kurią detalę — (10) ar (11) — gaminant būtų didesnis atliekų procentas, jei jas gamintume iš to paties ritinio formos ruošinio?

c) Palyginkite (7), (8) ir (9) detalių paviršių plotus ir tūrius.

13 ATSAKYMAI IR NURODYMAI

1. a), b) viena; c) be galo daug.

2. a) AB, BC, CD, AD; b) $A_1D_1C_1$ ir DD_1C_1; c) BCC_1, DCC_1 ir BCD; d) visi atkarpoje AA_1.

3. Taip.

4. a) taip; b) ne.

5. a) ne; b) 4.

6. a) vienoje plokštumoje; b) ne vienoje plokštumoje — stalas klibės.

7. a), d) taip; b), c) ne.

8. a) 1; b) 0.

11. a) vieną; b) nei vienos.

12. a) ne; b) taip.

13. a) 6; b) ne; c) taip, pvz., $AK \mathrel{\dot{-}} LM$.

15. Žr. 13 užd. modelį.

16. a) $90°$; b) $0°$; c) $90°$; d) $45°$; e) $90°$; f) $0°$; g) $0°$; h) $\approx 64°54'$.

17. a) $60°$, $60°$, $0°$; b) statiniai $90°$, $45°$, 0^0, įžambinė $45°$, $45°$, 0^0.

18. a) ne; b) vieną per LN; c) $55°$, $0°$, $90°$.

19. Visoms.

20. Kerta BC ir CD, prasilenkia su AB ir AD.

21. b) 3 cm; c) lygiagreti; d) 15 cm^2, 37,5 cm^2.

23. a) ABC ir $A_1B_1C_1$; b) AA_1D_1 ir BB_1C_1; c) ABB_1 ir DCC_1.

24. a) stačiakampis; b) $(10 + 10\sqrt{2})$ cm, $25\sqrt{2}$ cm^2.

25. a, b, d, e, f, g, h, i, k, l, m, p, r, u.

28. 40 lx, $\frac{20}{13\sqrt{26}} \approx 0{,}3$ (lx), $\frac{2560}{641\sqrt{641}} \approx 0{,}16$ (lx), $\frac{2560}{241\sqrt{241}} \approx 0{,}68$ (lx).

29. $BM_1 > AM_1$, 3, $\sqrt{84}$.

30. 16,8 m.

31. Dvi statmenas briaunai.

32. a) susikerta, prasilenkia, lygiagrečios, b) lygiagrečios.

33. Taip.

34. b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; d) $\approx 54°44'$; e) lygiakraščiai; f) 60°, 60°, 90°;
g) nepriklauso, $AC \perp BM$.

35. a) statusis; b) statieji; c) 3 cm, $\sqrt{73}$ cm, $\sqrt{109}$ cm; d) 3 cm, 3 cm, $\sqrt{73}$ cm; e) 16°42′, $\approx 20°33'$; f) statmenyje trikampio plokštumai, išvestame per įžambinės vidurio tašką (apibrėžto apskritimo centrą).

36. Pasinaudoti kampo sinuso apibrėžimu ir kosinusų teorema.

38. a) lygiagrečios; b) panašūs; c) į vieną pusę nuo plokštumų, 24 cm, 12 cm ir 8 cm, 4 cm; d) 6 cm, 18 cm, kai M tarp plokštumų, 3 cm, 9 cm, kai M į vieną pusę nuo plokštumų.

39. a) susikertančios, prasilenkiančios, lygiagrečios;
b) lygiagrečios, prasilenkiančios.

40. a) 1,6 m; b) $\approx 37°$; c) $\approx 10\,\text{m}^2$.

41. a) 1 m; b) $\approx 49°6'$.

43. $\approx 54°40'$.

45. Taškas.

46. a), c), e) taip; b), d), f) ne.

47. b), c) taip; a), d) ne.

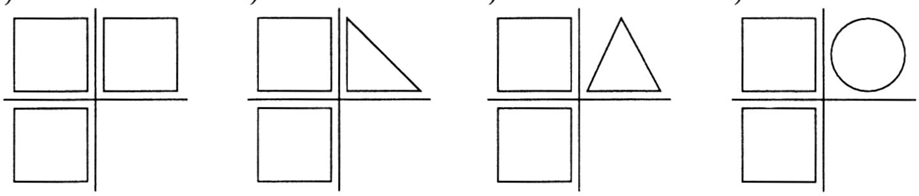
48. a), b), f) ne; c), d), e) taip.

49. a), b), c), d), f) taip; e) ne.

50. ne, taip, ne.

51. Tos, kurios būdingos kiekvienam lygiagretainiui.

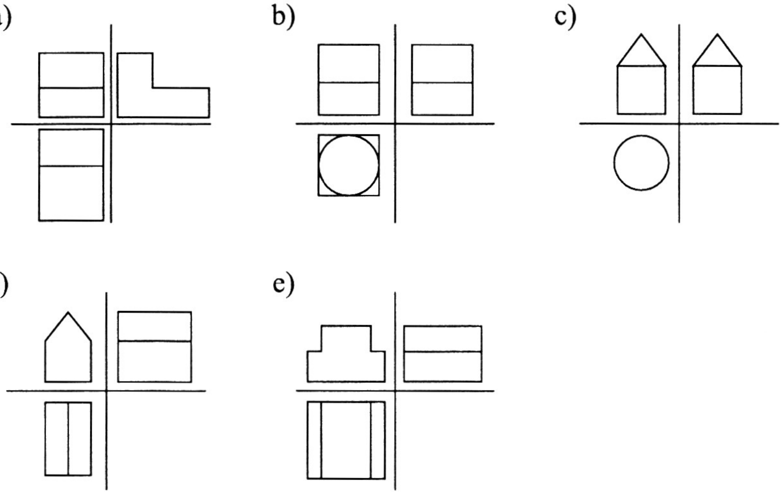
53. a) b) c) d)



91 pav.

Atkarpos lygiagrečios horizontaliajai plokštumai xOy.

54. a) b) c) d) e)



92 pav.

55. b) ir c).

56. Atkarpa, jungianti dvi prizmės viršūnes, esančias ne vienoje sienoje.

57. 4, 10, 18, $n(n-3)$.

60. a) 90°; b) 60°; c) 60°; d) 0°; e) $\approx 26°35'$, 30°.

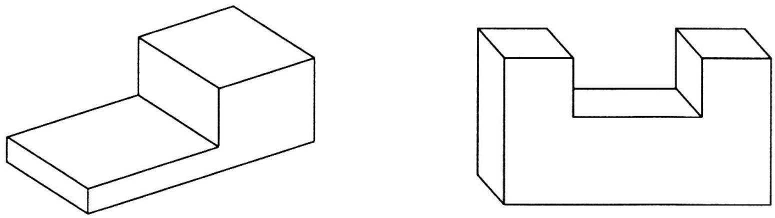
62. $18(24+\sqrt{3}) \approx 463$ (cm^2).

63. a) ne; b) taip.

64. a) $\left(\frac{243\sqrt{3}}{2}+1350\right)$ cm^2; b) $\frac{147}{2}(\sqrt{3}+20)$ cm^2.

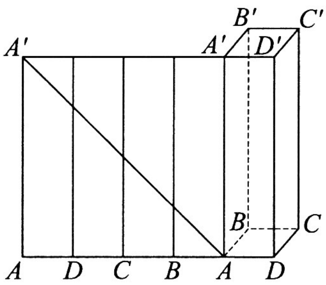
65. a) $2a\sin\frac{\alpha}{2}$, $2a\cos\frac{\alpha}{2}$; b) $2a\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$; c) $2a^2\sin\alpha$, $8a^2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

66.



93 pav.

67.



94 pav.

68. Taip.

71. Antrajai 2,72 m^2 daugiau.

72. ≈ 94 cm.

73. $\approx 21\ m^2$.

74. a) lygios; b) lygūs.

75. a) 25 m^2; b) 0,6.

76. 2,38 m^3, 3,07 m^3.

77. $\approx 5{,}628 \cdot 10^6$ t.

78. $42{,}84a$ Lt.

79. $\frac{9+\sqrt{3}}{2}a^2$; $\frac{5}{6}a^3$.

81. b) $(162 + 9\sqrt{3})\ cm^2$; c) $81\sqrt{3}\ cm^3$.

82. a) 4200 cm^2; b) 15 000 cm^3.

83. $S_š = 64\pi\ dm^2$, $S_v = 98\pi\ dm^2$, $V = 128\pi\ dm^3$.

84. Į pirmąjį du kartus daugiau.

85. 78,38 dm^2.

86. 12; $\approx 49\%$.

87. $\approx 0,7\,m^3$.

88. a) 5 cm; b) 24π cm; c) 12π cm^2.

89. Pirmojo.

90. a) $113°50'$; b) 3.

91. $\frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}\alpha \cdot \rho = 72\pi \operatorname{tg}\alpha \cdot \rho$; 126,5 t; 261,1 t; 86,4 t; 162,8 t.

92. a) $\frac{\pi l^2(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha}$, $\frac{\pi l^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$;
b) sumažės 4 kartus, tūris — 8 kartus.

94. Sumažėjo 9 kartus.

95. Padidėjo 8 kartus.

96. ≈ 48 kartus.

97. 2,00 cm.

98. $5,06 \cdot 10^8$ km^2.

99. 1 642 cm^2.

100. a) 11 743; b) 7 828.

101. Stačiakampis.

103. 4 kartus.

104. a) 72π; b) 48.

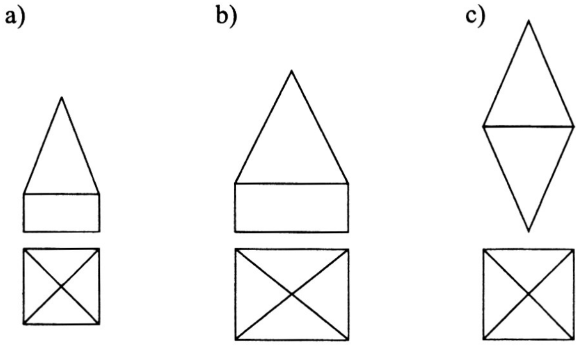
105. a) AE ir CE; b) lygiašonis trikampis;
c) $\frac{a\sqrt{2b^2-a^2}}{2}$.

107. a) lygiašonės trapecijos; b) 6 cm, 4 cm; c) tūrių 117 : 8, paviršių 21 : 4.

108. a) $\approx 419\,949\,cm^3$; b) $\approx 1,64$ kg.

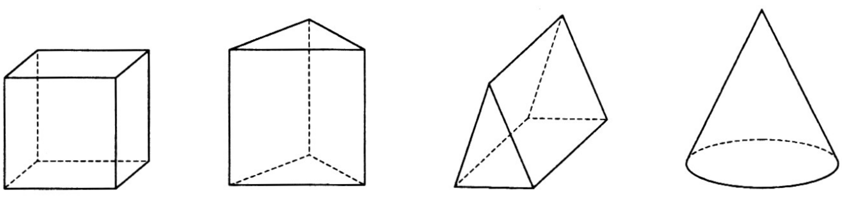
109. $\approx 665\,cm^3$, $\approx 884\,cm^3$.

110. a) 600, 1750, 1110; b) 1000, ≈ 4 960, ≈ 2 540; c) žr. 95 pav.



95 pav.

111. a) 2736; b) $\frac{7225\sqrt{3}}{4}$; c) 2450; d) 240π.



96 pav.

112. ≈ 19,3 l.

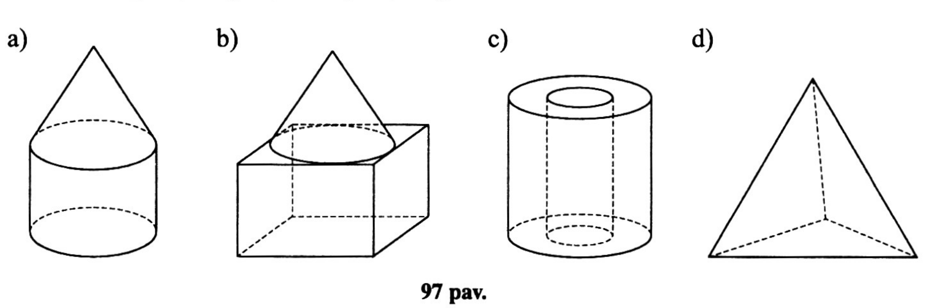
113. ≈ 472 kg.

114. ≈ 1,4 kg.

115. ≈ 95 ℓ.

116. ≈ 180 g.

117. 1. a) 76 g; b) 230 g; c) 69,5 g; d) 31,4 g;
2. a) 3 g; b) 7 g; c) 7,5 g; d) 2 g.



97 pav.

118. 38,8 kg.

119. 497 g.

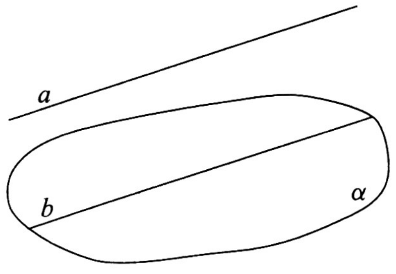
120. a) 731π mm^3, 383π mm^2; b) 945π mm^3, 648π mm^2.

121. a) $(27000 + 5625\pi)$ cm^3, $(5400 + 750\pi)$cm^2;
b) $(10640 + 280\pi)$ cm^3, $(3548 + 156\pi)$ cm^2;
c) $229{,}671\pi$ cm^3, $143{,}3\pi$ cm^2;
d) $202{,}248\pi$ cm^3, $145{,}8\pi$ cm^2;
e) $44{,}5\pi$ cm^3, $58{,}5\pi$ cm^2;
f) $36{,}2\pi$ cm^3, $46{,}5\pi$ cm^2;
g) $(2178 - 220{,}5\pi)$ cm^3, $(1034 + 101{,}5\pi)$ cm^2;
h) $(1188\pi - 528)$ cm^3, $(468\pi + 628)$ cm^2;
i) $(68040 - 3267\pi)$ cm^3, $(473\pi + 9216)$ cm^2;
j) $(380 - 37{,}5\pi)$ cm^3, $(496 - 7{,}5\pi)$ cm^2;
k) $(216000 + 864\pi)$ cm^3, $(21600 + 216\pi)$ cm^2;
l) 15750π cm^3, 2275π cm^2, ≈ 84 kg;
m) $(1398600 + 27195\pi)$ cm^3, $(52560 + 17990\pi)$ cm^2;
n) 4218π cm^3, 2977π cm^2, $\approx 22{,}5$ kg;
o) 63536π cm^3, 6708π cm^2;
p) 877446π cm^3, $(46513\pi - 12600)$ cm^2, $\approx 4{,}68$ t;
r) $14{,}25\pi$ cm^3, $10{,}25\pi$ cm^2.

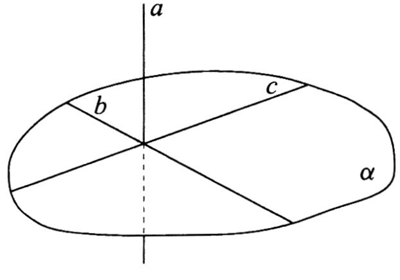
122. 1) $7 \cdot 10^2$ kub.v., $2{,}7 \cdot 10^2$ kv.v.; 2) $7{,}2 \cdot 10^2$ kub.v., $5{,}2 \cdot 10^2$ kv.v.;
3) $1{,}7 \cdot 10^3$ kub.v., $6{,}1 \cdot 10^2$ kv.v.; 4) $1{,}7 \cdot 10^3$ kub.v., $8{,}5 \cdot 10^2$ kv.v.;
5) $2{,}0 \cdot 10^3$ kub.v., $1{,}1 \cdot 10^3$ kv.v.; 6) $1{,}5 \cdot 10^3$ kub.v., $1{,}4 \cdot 10^3$ kv.v.;
7) $4\pi a^3$, $12\pi a^2$; 8) $2\pi a^3$, $6\pi a^2$; 9) $4\pi a^3$, $10\pi a^2$; 10) $\frac{7}{3}\pi a^3$, $6\pi a^2$;
11) $\frac{5}{3}\pi a^3$, $10\pi a^2$; 12) $\frac{16}{3}\pi a^3$, $14\pi a^2$.

PAGRINDINIAI TEIGINIAI

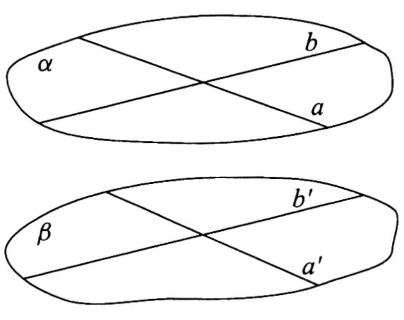
1. Tiesės ir plokštumos lygiagretumas
Jei $a \parallel b$, $b \subset \alpha$, $a \not\subset \alpha$, *tai* $a \parallel \alpha$.



2. Tiesės ir plokštumos statmenumas
Jei $a \perp b$ *ir* $a \perp c$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$, *tai* $a \perp \alpha$.

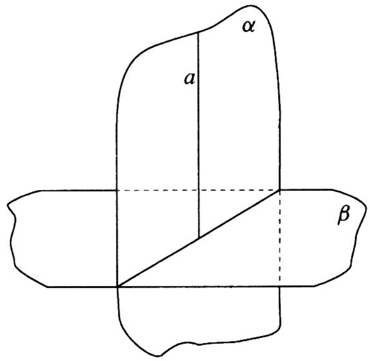


3. Plokštumų lygiagretumas
Jei $a \parallel a'$, $b \parallel b'$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a' \subset \beta$, $b' \subset \beta$, *a ir b susikerta, tai* $\alpha \parallel \beta$.



4. Plokštumų statmenumas

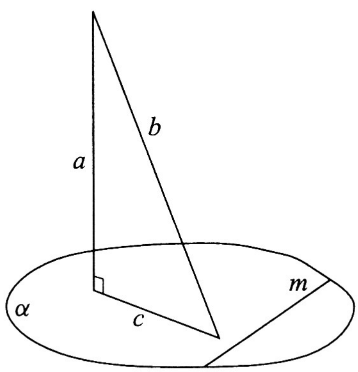
Jei $a \perp \beta$, $a \subset \alpha$, *tai* $\alpha \perp \beta$.



5. Trijų statmenų teorema

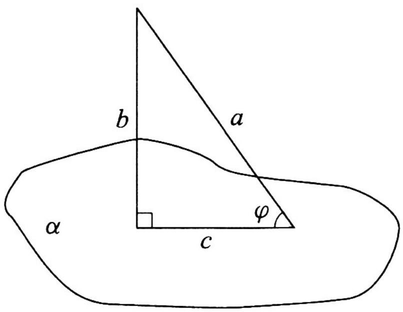
Jei $m \perp c$, *tai* $m \perp b$.

Jei $m \perp b$, *tai* $m \perp c$.



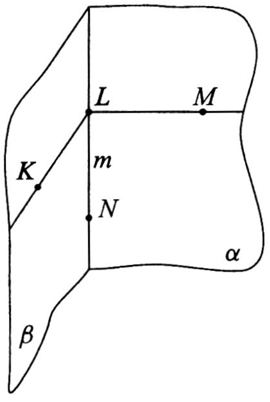
a — statmuo plokštumai α,
b — pasviroji plokštumai α,
c — pasvirosios projekcija plokštumoje α,
m — tiesė plokštumoje α.

6. Kampas tarp tiesės ir plokštumos



a — pasviroji plokštumai α,
c — pasvirosios a projekcija plokštumoje α,
φ — kampas tarp pasvirosios a ir plokštumos α.

7. Kampas tarp plokštumų

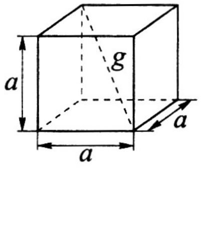


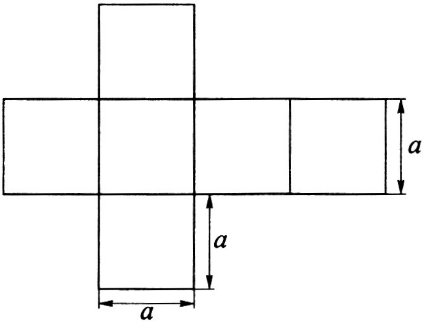
$KL \perp m$, $KL \subset \beta$, $ML \perp m$, $ML \subset \alpha$,
m — plokštumų α ir β susikirtimo tiesė,
$\angle \alpha m \beta$ arba $\angle KLNM$ — dvisienis kampas,
$\angle KLM$ — kampas tarp plokštumų α ir β.

Toliau vartojami žymėjimai:

a — briaunos ilgis,
d — apskritimo skersmuo,
g — įstrižainė,
H — kūno aukštinė,
h — apotema,
l — kūgio sudaromoji,
P — pagrindo perimetras,
R — apskritimo ar sferos spindulys,
r — apskritimo spindulys,
$S_{\check{s}}$ — šoninio paviršiaus plotas,
S_{p} — pagrindo plotas,
S_{v} — viso paviršiaus plotas,
V — tūris.

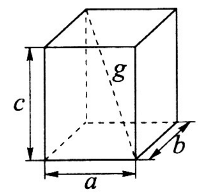
8. Kubas

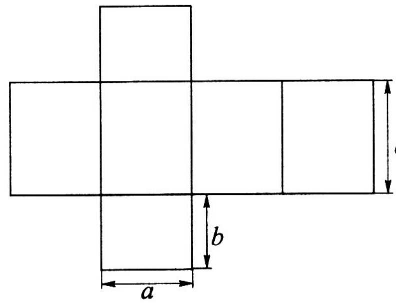




$V = a^3$; $S_{\text{v}} = 6a^2$; $g = a\sqrt{3}$.

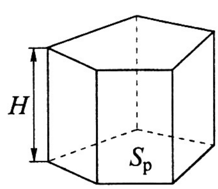
9. Stačiakampis gretasienis

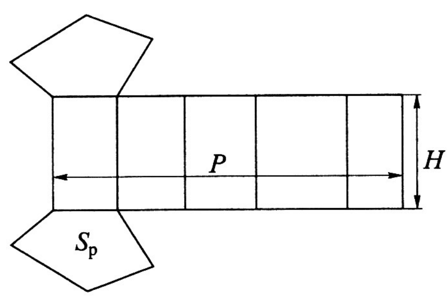




$V = a \cdot b \cdot c;$ $\quad S_v = 2(ac + bc + ab);$ $\quad g = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

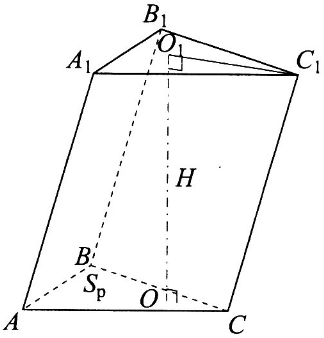
10. Stačioji prizmė

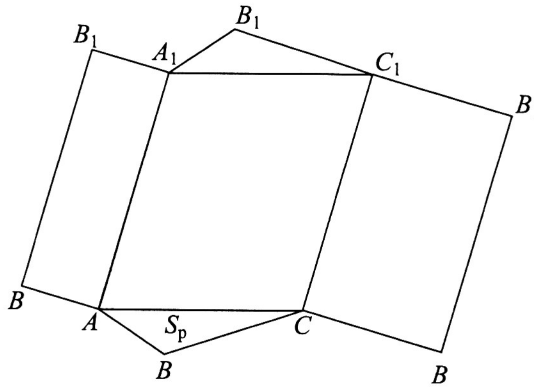




$V = S_p \cdot H;$ $\quad S_š = P \cdot H;$ $\quad S_v = P \cdot H + 2S_p.$

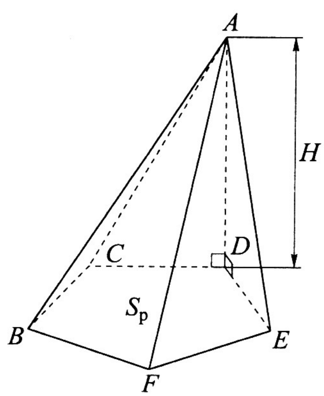
11. Pasviroji prizmė

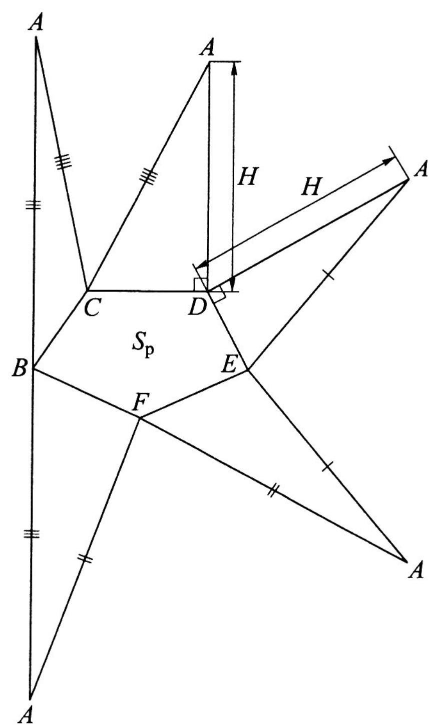




$V = S_p \cdot H;$ $\qquad S_v = S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{CC_1A_1A} + 2S_{ABC}.$

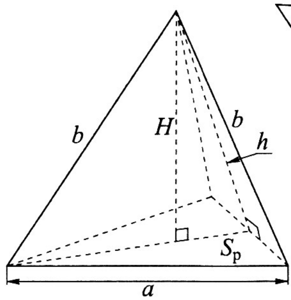
12. Piramidė

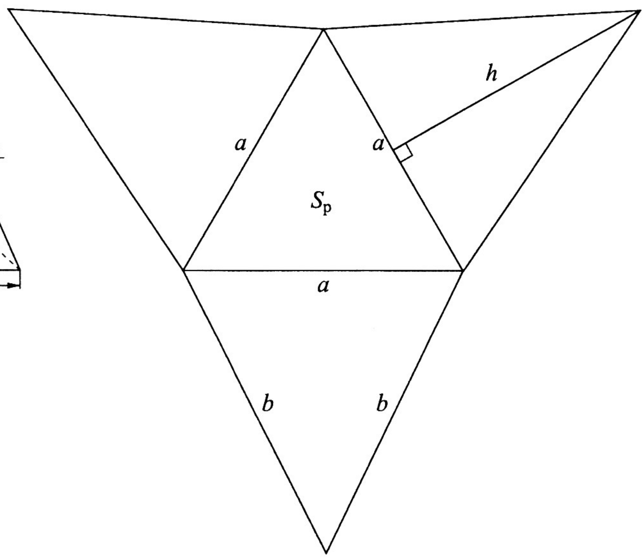




$V = \frac{1}{3} S_p \cdot H;$ $\qquad S_v = S_{BAC} + S_{CAD} + S_{DAE} + S_{EAF} + S_{FAB} + S_{BCDEF}$

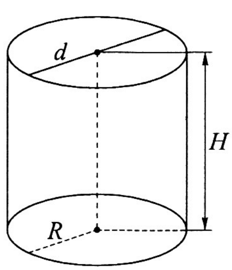
13. Taisyklingoji piramidė

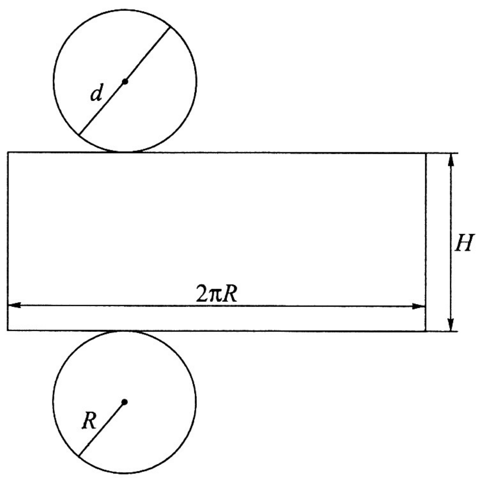




$$V = \frac{1}{3}S_p \cdot H; \qquad S_v = \frac{1}{2}P \cdot h + S_p.$$

14. Ritinys

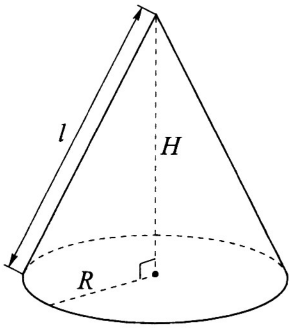


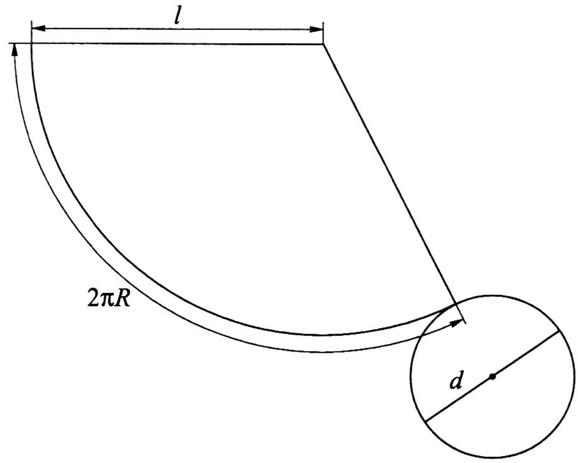


$$V = \pi R^2 \cdot H = \pi \frac{d^2}{4} H; \qquad S_{š} = 2\pi RH = \pi dH;$$

$$S_v = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(R + H).$$

15. Kūgis

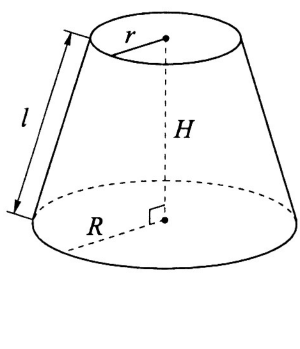


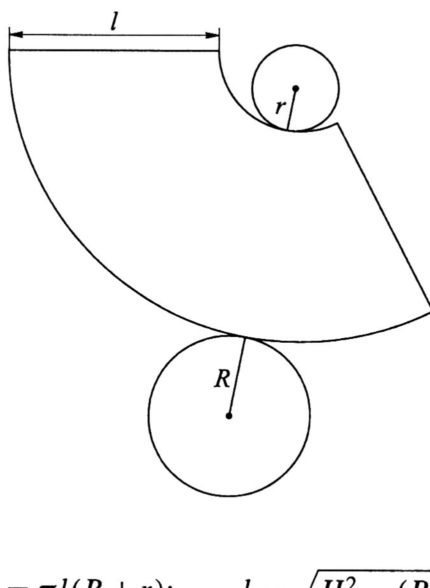


$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H; \qquad S_{\text{š}} = \pi R l;$$

$$S_{\text{v}} = \pi R l + \pi R^2 = \pi R(l + R); \qquad l = \sqrt{H^2 + R^2}.$$

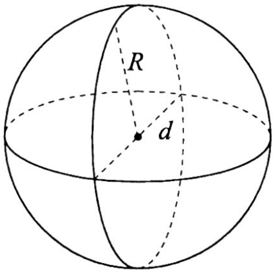
16. Nupjautinis kūgis

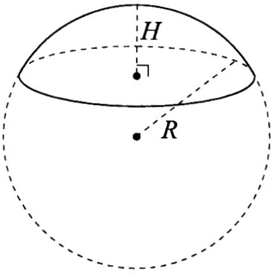




$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2); \qquad S_{\text{š}} = \pi l(R + r); \qquad l = \sqrt{H^2 - (R - r)^2}.$$

17. Rutulys





$$V = \frac{4}{3}\pi R^3; \qquad S = 4\pi R^2 = \pi d^2$$

$$V_{\text{nuopjovos}} = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H); \qquad S_{\text{š.nuopjovos}} = 2\pi RH.$$

DALYKINĖ RODYKLĖ

LEIDYKLOS TEV LEIDŽIAMI
MATEMATIKOS VADOVĖLIAI IR KITA MOKOMOJI LITERATŪRA
PAGRINDINEI MOKYKLAI

5 klasei

1. Matematika ir pasaulis. Vadovėlis 5 klasei (išleistas taip pat rusų ir lenkų kalbomis).
2. Matematika ir pasaulis. Pratybų sąsiuviniai, I ir II dalys.

6 klasei

3. Matematika ir pasaulis. Vadovėlis 6 klasei (išleistas taip pat rusų ir lenkų kalbomis).
4. Matematika ir pasaulis. Pratybų sąsiuviniai, I ir II dalys.

7 klasei

5. Matematika 7. Vadovėlis 7 klasei (išleistas taip pat rusų ir lenkų kalbomis).
6. Matematika 7. Uždavinynas.
7. Matematika 7. Mokytojo knyga.

8 klasei

8. Matematika 8. Vadovėlis 8 klasei (vertimai į rusų ir lenkų kalbas pasirodys 2000 m.).
9. Matematika 8. Uždavinynas.
10. Matematika 8. Mokytojo knyga (pasirodys 2000 m.).

10 klasei

11. Geometrija. Mokymo medžiaga 10 klasei (tiesės, plokštumos ir kūnai erdvėje).
12. Geometrijos praktiniai uždaviniai.

Milda Vosylienė
GEOMETRIJA 10

SL 1185. 1999 07 22. 6 sp. l. Tiražas 39 500 egz. Užs. Nr. 687
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius
Spausdino AB „Vilspa" spaustuvė,
Viršuliškių skg. 80, LT-2056 Vilnius